UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

THÈSES

PRÉSENTÉES

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS - SCIENCES MATHÉMATIQUE

PAR

RAYMOND GÉRARD

1ère Thèse : THÉORIE DE FUCHS SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE.

2ème Thèse : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

SOUTENUES LE 18 MAI 1968 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. J. FRENKEL Président

J. LERAY
F. NORGUET } Examinateurs
G. REEB

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

THÈSES

PRÉSENTÉES

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS- SCIENCES MATHÉMATIQUE

PAR

RAYMOND GÉRARD

1ère Thèse : THÉORIE DE FUCHS SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE.

2ème Thèse : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

SOUTENUES LE 18 MAI 1968 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. J. FRENKEL Président

J. LERAY
F. NORGUET } Examinateurs
G. REEB

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION. I

NOTATIONS ET NOTIONS D'ORDRE GENERAL. VI

Première Partie : THEORIE LOCALE.

Chapitre I

§ 0 Notations. 1

§ 1 Préliminaires algébriques. 2

§ 2 La notion d'ordre fini à l'origine. L'espace vectoriel $\mathcal{H}_o^{p\times p}(\mathbb{R})$. 9

§ 3 Etude des sous espaces vectoriels de dimension finie $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathbb{R})$ stable par les opérations de $\pi_1(\mathcal{D})$. Sous espaces vectoriels faiblement singuliers à l'origine. 11

§ 4 Système de Pfaff associé à un sous espace vectoriel de dimension finie ρ de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathbb{R})$ faiblement singulier à l'origine. 25

§ 5 Etude des sous espaces vectoriels de dimension finie de $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(\mathbb{R})$ faiblement singuliers à l'origine. 29

§ 6 Etude de certains systèmes de Pfaff complètement intégrables. 36

Deuxième Partie : THEORIE GLOBALE.

Chapitre II

§ 1 Définition de l'ensemble $\Omega^{p\times p}(V,A)$. Résidu d'un élément de $\Omega^{p\times p}(V,A)$. 45

§ 2 Exemples. 49

§ 3 Stabilité de $\Omega^{p\times p}(V,A)$ par modification de Hopf. 53

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552711_0005

Chapitre III

§ 1 Système de Pfaff du type de Fuchs. 60

§ 2 Le théorème de Fuchs sur une variété analytique. 64

§ 3 Des exemples, 68

A) Un exemple local. 68

B) Un exemple global sur $P_n(\mathbb{C})$. 72

C) Système de Fuchs associé à la fonction hypergéométrique F_1. 80

BIBLIOGRAPHIE.

--ooOoo--

INTRODUCTION

Une équation différentielle linéaire et homogène est dite de Fuchs au voisinage de l'origine du plan complexe, si elle s'écrit dans un voisinage de ce point, sous la forme :

$$(1) \qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx} + \ldots + a_n(x) y = 0 \quad ,$$

où les coefficients $a_i(x)$ sont holomorphes.

Supposons que les coefficients $a_i(x)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ de (1) soient holomorphes dans un disque D du plan complexe centré à l'origine. Notons R le revêtement universel de $D - \{0\}$ et Ψ la projection canonique de R sur sa base. Toute solution f de (1) est holomorphe sur R et il existe un nombre $\lambda(f)$ réel tel que

$$(2) \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} \frac{f(Q)}{Q^{\lambda}} = 0 \quad , \quad Q \in R \quad , \quad x = \Psi(Q) \quad ;$$

pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant l'origine dans son adhérence et contenu dans un secteur angulaire de sommet l'origine différent du plan tout entier. Nous résumerons ceci en disant que f est d'ordre fini à l'origine.

Le théorème classique de Fuchs affirme que cette propriété des solutions caractérise les équations du type de Fuchs.

Dans une partie de sa thèse [13] A.H.M. LEVELT a montré que l'étude de ces équations se ramène (pages 19-20, th. 2.9. et th. 2.10.) à celle des systèmes d'équations différentielles de la forme :

$$(3) \qquad df = \left(\frac{P(x)}{x} dx \right) f \quad ,$$

où $P(x)$ est une matrice carrée holomorphe d'ordre n . La notion d'ordre fini se généralise évidemment aux fonctions à valeurs vectorielles et A.H.M. Levelt a caractérisé l'espace vectoriel des solutions d'un système d'équations différentielles du type (3) par la propriété d'être "faiblement singulier à l'origine". *

* voir la notion généralisée (page II de cette introduction).

La première partie de ce travail dont les résultats ont été annoncés dans [5] et [6] généralise ces résultats de A.H.M. Levelt à plusieurs variables. Considérons par exemple un polydisque centré à l'origine de $\mathbb{C}^2$ (muni des coordonnées x_1 et x_2) . Notons cette fois R le revêtement universel de $\mathcal{X} = (D - \{0\})^2$. Dans ce cas nous généralisons la notion d'ordre fini (chap. I, page 9, déf. 3) en utilisant des limites suivant des ouverts distingués (chap. I, page 9, déf. 2). Cela nous permet d'introduire l'espace vectoriel $\mathcal{H}_o^{p\times q}(R)$ des (p,q)-matrices holomorphes sur R et d'ordre fini à l'origine. A l'aide des préliminaires algébriques (chap. I, § 1 , A) nous montrons, (chap. I, § 3) que tout sous-espace vectoriel E de dimension finie q de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(R)$, stable par les opérations du groupe fondamental de admet une base dont la matrice associée est de la forme :

$$U(M) \prod_{j=1}^{2} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{2} Q_j^{F_j} \quad ,$$

où A_j et F_j $(j = 1 , 2)$ sont des matrices constantes ayant des propriétés remarquables (chap. I, § 3 , page 13) et où U est une (p,q)-matrice holomorphe dans D^2 .

L'espace vectoriel E est dit faiblement singulier à l'origine si le rang de la matrice $U(0)$ est maximum. Dans le cas où $q = p$, nous montrons (chap. I, § 4) que E est alors l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff complètement intégrable de la forme :

$$df = \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{P_j(x_1,x_2)}{x_j} dx_j \right) f \quad ,$$

où pour tout j , les (p,q)-matrices $P_j(x_1 , x_2)$ sont méromorphes dans D^2 et holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$. La réciproque de ce résultat est établie dans le § 6 du chapitre I .

Dans le § 5 du chapitre I , nous étudions les sous-espaces vectoriels de dimension finie p de $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(R)$ faiblement singulier à l'origine, pour cela nous définissons une application Θ de $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(R)$ dans $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(R)$. Un tel espace vectoriel est alors l'espace vectoriel des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles transformé pa Θ d'un système de Pfaff complètement intégrable.

- Cette théorie ne s'applique pas au cas où, la sous-variété singulière est :

$\{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \cup \{x_1 = x_2\}$ (au lieu de $\{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$ comme précédemment),

car elle utilise essentiellement la commutativité du groupe fondamental de $\mathcal{O}$. Pour étudier ce cas nous effectuons un éclatement de Hopf à l'origine. Dans la variété "modifiée", les sous-variétés singulières sont en position générale, mais pour avoir la théorie locale à l'origine dans la variété de base, il faut faire une théorie globale dans la variété "modifiée" ou du moins sur certains ouverts de coordonnées qui sont de Stein.

Ceci nous amène tout naturellement à la deuxième partie de ce travail qui développe la théorie globale. Dans cette deuxième partie, on se donne une variété analytique complexe V de dimension finie, et un sous-ensemble analytique A de codimension un en chacun de ses points, dont les composantes irréductibles sont sans singularité. Le chapitre II est destiné à la définition et à l'étude d'une classe $\Omega^{p\times p}(V,A)$ de formes différentielles matricielles holomorphes dans $V - A$ qui joueront le rôle de formes coefficients dans les systèmes de Pfaff du type de Fuchs. Nous montrons en particulier la stabilité de $\Omega^{p\times p}(V,A)$ par les modifications de Hopf introduites dans ce chapitre, résultat essentiel pour développer la théorie globale dans le cas où les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale. Nous déterminons explicitement $\Omega^{p\times p}(V,A)$ lorsque V est une variété de Stein ou un espace projectif complexe, A n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles toutes définies par des équations globales. Dans le chapitre III, nous définissons la classe des systèmes de Pfaff complètement intégrable du type de Fuchs, un élément de cette classe étant caractérisé par la propriété de son espace vectoriel d'être "faiblement singulier" en tout point de A . Nous donnons alors la démonstration du résultat suivant :

" Pour qu'un système de Pfaff complètement intégrable :

$$df = \omega f$$

où ω est holomorphe sur $V - A$, soit du type de Fuchs, il faut et il suffit que $\omega \in \Omega^{p\times p}(V,A)$."

Compte tenu du chapitre II, ce théorème nous donne les systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur une variété de Stein et sur un espace projectif complexe.

Dans le cas où les composantes irréductibles de A ne sont pas en

position générale, notre définition des systèmes de Pfaff du type de Fuchs utilise certaines modifications, nous montrons sur un exemple (§ 3, exemple A) que cette notion peut être définie, avec toutefois moins de simplicité, sans avoir recourt à ces modifications. D'autres exemples sont donnés dans ce § 3. L'exemple B nous montre un cas où, pour définir les systèmes de Pfaff du type de Fuchs, il suffit de poser la condition d'être faiblement singulier pour l'espace vectoriel des solutions en certains points de A qui sont les points singuliers de A .

La fonction hypergéométrique F_1 vérifie le système d'équations aux dérivées partielles :

$$x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y)\frac{\partial z}{\partial x} - \beta y(1-y)\frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta(x-y)z = 0$$

$$y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (\gamma(y-x) - (\alpha+\beta'+1)y^2 + (\alpha+\beta'-\beta+1)xy + \beta x)\frac{\partial z}{\partial y} - x(1-x)\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\beta'(y-x)z = 0$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \beta'\frac{\partial z}{\partial x} + \beta\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad .$$

Nous montrons (exemple C), que l'application

$$z \to \begin{pmatrix} z \\ x\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ y\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

transforme ce système d'équations aux dérivées partielles en un système de Pfaff du type de Fuchs sur le plan projectif complexe. Ce résultat généralise des résultats de Monsieur A.H.M. Levelt [13] et de Monsieur Erdélyi [3] .

Ce n'est pas seulement pour sacrifier à une vénérable tradition académique que je tiens à exprimer ma raconnaissance à tous ceux sans lesquels ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Je pense d'abord à Monsieur J. LERAY qui m'a fait connaître la thèse de Monsieur LEVELT, m'en a proposé la généralisation et a bien voulu suivre et encourager mes recherches ; puis au Département de Mathématique de Strasbourg qui m'a procuré d'excellentes conditions de travail, en particulier Monsieur J. FRENKEL dont les critiques m'ont évité bien des erreurs et m'ont permis d'améliorer beaucoup la rédaction de ce travail, Monsieur F. NORGUET qui m'a aidé à préciser et à généraliser certaines de mes idées, Monsieur G. REEB qui a porté à mes recherches un intérêt constant et qui a bien voulu diriger ma seconde thèse ; enfin je n'oublie pas qu'à PISE j'ai bénéficié des conseils précieux de Monsieur A. ANDRECTTI.

La deuxième partie de ce travail fait partie de la R.C.P. 25 du C.N.R.S.

* * *

NOTATIONS ET NOTIONS D'ORDRE GENERAL

Dans toute la suite nous noterons :

D : un disque du plan complexe centré à l'origine.

$\hat{D} = D - \{0\}$.

$\mathcal{D} = (\hat{D})^n \times D^{m-n}$: (E^k désignant le produit cartésien de k exemplaires de l'ensemble E).

$\mathcal{M}(p,q,\mathbb{C})$: l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients complexes.

$\mathcal{M}(p,\mathbb{C}) = \mathcal{M}(p,q,\mathbb{C})$.

$G\,l(p,\mathbb{C})$: le groupe linéaire complexe d'ordre p .

Pour toute variété analytique complexe V , nous noterons :

$\mathcal{R}(V)$: le revêtement universel de V .

π_V : la projection canonique de $\mathcal{R}(V)$ sur V .

$\pi_1(V)$: le groupe fondamental de V .

$\mathcal{H}(V)$: l'anneau des fonctions holomorphes sur V .

$\mathcal{H}^{p\times q}(V)$: l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications holomorphes de V dans $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{C})$.

$\mathcal{H}_i^{p\times p}(V)$: l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{H}^{p\times p}(V)$.

$\Omega^{p\times p}(V)$: l'ensemble des formes différentielles de degré 1 holomorphes sur V et à valeurs matricielles carrées d'ordre p .

$\mathcal{J}^{p\times p}(V)$: l'ensemble des systèmes de Pfaff complètement intégrable de la forme $df = \omega f$ où $\omega \in \Omega^{p\times p}(V)$.

Le groupe $\pi_1(V)$ opère à gauche sur $\mathcal{R}(V)$; pour tout $Q \in \mathcal{R}(V)$ et $g \in \pi_1(V)$, nous noterons $g.Q$, le résultat de l'action de g sur Q . On appellera représentation canonique de $\pi_1(V)$ dans le groupe AUT $(\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{R}(V)))$

des automorphismes de $\mathcal{H}^{pxq}(\mathcal{R}(V))$, l'application qui, à tout $g \in \pi_1(V)$, associe l'élément g^* de $AUT(\mathcal{H}^{pxq}(\mathcal{R}(V)))$ défini par :

$$(g^* \Phi)(Q) = \Phi(g^{-1} \cdot Q) \quad \text{pour tout} \quad \Phi \in \mathcal{H}^{pxp}(\mathcal{R}(V))$$

$$\text{et tout} \quad Q \in \mathcal{R}(V) .$$

Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie q de $\mathcal{H}^{px1}(V)$, si $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_q)$ est une base de E , on appelle <u>matrice associée</u> à (e) et on note T_e , l'application (holomorphe) de V dans $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{C})$ définie par :

$$T_e(M) = (e_1(M) , e_2(M) , \ldots , e_q(M)) \quad \text{pour tout} \quad M \in V .$$

Si E est un sous espace vectoriel de dimension finie q de $\mathcal{H}^{px1}(\mathcal{R}(V))$ et (e) une base de E , nous avons pour tout $g \in \pi_1(V)$

$$g^* T_e = T_e D_g \quad \text{où} \quad D_g \in Gl(q,\mathbb{C}) .$$

PREMIERE PARTIE : THEORIE LOCALE

CHAPITRE I

§ 0. NOTATIONS

Dans ce chapitre nous utiliserons les notations simplifiées suivantes :

R : le revêtement universel de $\hat{D}$.

R' : le revêtement ramifié minimal prolongeant R au-dessus de l'origine de $\mathbb{C}$.

$\mathcal{R} = R^n \times D^{m-n}$.

$\mathcal{R}' = (R')^n \times D^{m-n}$.

ψ (resp. ψ') : la projection canonique de $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) sur $\mathcal{Q} = (\hat{D})^n \times D^{m-n}$ (resp. D^m).

$Q_o = \psi'^{-1}(0)$.

Nous supposerons avoir choisi un point de base x_o dans D, tout point $Q \in R$ est alors la classe d'homotopie d'un lacet $x_o \widetilde{\ } x$ d'origine x_o et d'extrémité $x = \psi(Q)$. La fonction logarithme est définie par la formule :

$$\log. Q = \int_{x_o \widetilde{\ } x} \frac{dz}{z}$$

et pour toute matrice complexe A

$$Q^A = \exp.(A \log. Q).$$

Nous avons :

$$d Q^A = \frac{A}{x} Q^{A-I} dx \quad \text{où} \quad x = \psi(Q).$$

Si A est une matrice triangulaire ayant une seule valeur propre $a \neq 0$, on appelle <u>détermination principale du logarithme de</u> A et on note $\log. A$ la matrice définie par :

$$\log. A = 2\pi i \rho I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left(\frac{A}{a} - I\right)^j ,$$

ρ étant le nombre complexe défini par :

$$\exp.(2\pi i \rho) = a \quad \text{avec} \quad 0 \leq \mathrm{Re}.\,\rho < 1 \quad , \quad i^2 = -1 .$$

La matrice $\left(\frac{A}{a} - I\right)$ étant nilpotente, log. A est un polynôme en A vérifiant exp. (log. A) = A .

Si A est une matrice complexe régulière, il existe une matrice inversible S telle que

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_r \end{pmatrix} S ,$$

les matrices A_i étant triangulaires à valeur propre unique et non nulle. On pose alors :

$$\log.A = S^{-1} \begin{pmatrix} \log. A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log.A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \log.A_r \end{pmatrix} S ,$$

on vérifie encore que exp. (log. A) = A et que cette définition est indépendante de la représentation de A sous la forme $S^{-1} A' S$.

§ 1 . PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES .

A - Soit E un espace vectoriel de dimension finie q sur $\mathbb{C}$.

1 . a) Soit $G = (g_j)_{1 \le j \le n}$ une famille d'endomorphismes de E .

Définition 1.

Un sous espace vectoriel F de E est dit stable par la famille G si F est stable par g_j pour tout $j = 1,2,\ldots,n$.

Notons :

$$P_j(X) = (X - a_j^1)^{\alpha_{j,1}} (X - a_j^2)^{\alpha_{j,2}} \cdots (X - a_j^{r_j})^{\alpha_{j,r_j}}$$

le polynôme minimal de l'endomorphisme g_j .

Soient :

- $E_j^k = \mathrm{Ker}\,(g_j - a_j^k\, I)^{\alpha_{j,k}}$ $\qquad$ I : identité ,

- $\mathfrak{S}_n$: l'ensemble des applications s de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

a) $1 \leq s(j) \leq r_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$

b) $E_s = E_1^{s(1)} \cap E_2^{s(2)} \ldots \cap E_n^{s(n)} \neq \{0\}$.

Définition 2.

La famille $(E_s)_{s \in \mathfrak{S}_n}$ sera appelée famille de sous espaces vectoriels adaptée à G et chaque E_s sera appelé sous espace vectoriel adapté à G .

b) Supposons les endomorphismes de la famille G deux à deux permutables.

Proposition 1.

L'espace vectoriel E est somme directe de la famille de sous espaces vectoriels $(E_s)_{s \in \mathfrak{S}_n}$. Chaque sous espace vectoriel E_s est stable par G et pour tout $j = 1,2,\ldots,n$, la restriction de g_j à E_s admet $a_j^{s(j)}$ pour seule valeur propre.

Pour la démonstration voir par exemple [12] chap. IV .

Proposition 2.

Il existe une suite strictement croissante

$$E_o \subset E_1 \subset E_2 \ldots \subset E_q = E$$

de sous espaces vectoriels de E stables par G .

Démonstration.

Elle se fait par récurrence sur la dimension q de E . Pour $q = 0$, la proposition est évidente ; supposons la vraie pour tout espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $q - 1$. Soient $(g_j^*)_{1 \leq j \leq n}$, les endomorphismes transposés des g_j

$$g_j^*\,(x^*)\,(x) = x^*\,(g_j(x))$$

pour tout $x \in E$ et tout $x^* \in E^*$ (dual de E).

Les endomorphismes g_j^* sont deux à deux permutables, ils ont donc un vecteur propre commun e^*. Désignons par N le noyau de e^*. Le sous espace vectoriel N est de dimension $q - 1$ et de plus stable par G ; il existe donc une suite strictement croissante

$$E_o \subset E_1 \subset E_2 \ldots \subset E_{q-1} = N$$

de sous espaces vectoriels de N qui satisfait aux conditions de l'énoncé pour N. Si l'on pose $E_q = E$ la nouvelle famille ainsi obtenue répond à la question pour E.

2. Définition 3.

On appelle valuation sur E, toute application φ de E dans un ensemble totalement ordonné I possédant les propriétés suivantes :

a) $\varphi(x + y) \geq \min.(\varphi(x), \varphi(y))$ pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$.

b) $\varphi(\lambda x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Remarque 1.

Les propriétés a) et b) entrainent

$$\varphi(x) \leq \varphi(0) \quad \text{pour tout} \quad x \in E .$$

Proposition 3.

Toute valuation φ sur E ne prend qu'un nombre fini de valeurs

$$\varphi(0) = \varphi^1 > \varphi^2 > \ldots > \varphi^s ,$$

et les sous espaces vectoriels

$$E^k = \{ x \in E \mid \varphi(x) \geq \varphi^k \}$$

forment une filtration strictement croissante de E.

Démonstration.

Pour tout $x \in E$ posons

$$E(x) = \{ y \in E \mid \varphi(y) \geq \varphi(x) \} ;$$

$E(x)$ est un sous espace vectoriel de E et $E(x) \subset E(y)$ équivaut à $\varphi(x) \geq \varphi(y)$. Par suite $E(x) = E(y)$ équivaut à $\varphi(x) = \varphi(y)$ et comme il y a au plus $q + 1$ sous espaces vectoriels $E(x)$ distincts, la valuation φ

prend un nombre fini de valeurs :

$$\varphi(x_1) > \varphi(x_2) > \ldots > \varphi(x_s) .$$

Pour tout $x \in E$ nous avons :

$$\varphi(x_1) \geq \varphi(x) \geq \varphi(x_s) .$$

Donc

$$E(x_s) = E \quad \text{et} \quad E(x_1) = E(0) .$$

En résumé la valuation φ prend un nombre fini de valeurs

$$\varphi(0) = \varphi^1 > \varphi^2 \quad \ldots \quad \varphi^s$$

et les sous espaces vectoriels de E définis par

$$E^k = \{ x \in E \mid \varphi(x) \geq \varphi^k \}$$

forment une filtration strictement croissante de E .

Définition 4.

La valuation φ est dite invariante par une famille $G = (g_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'endomorphismes de E si :

$$\varphi(g_j(x)) = \varphi(x) .$$

pour tout $x \in E$ et $j = 1,2,\ldots,n$.

Proposition 4.

La filtration strictement croissante de E associée à la valuation φ est alors invariante par la famille G .

3. Soit $E^1 \subset E^2 \subset \ldots \subset E^t$ une filtration strictement croissante de E .

Définition 5.

Une base $(e_j)_{1 \leq j \leq q}$ de E est dite adaptée à cette filtration si on a $e_j \in E^i$ pour tout $j \leq \dim. E^i$ et $1 \leq i \leq t$.

Lemme 1.

Si cette filtration est invariante par une famille $G = (g_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'endomorphismes deux à deux permutables, il existe une base de E adaptée à cette filtration et triangulant simultanément les matrices des endomorphismes g_j .

Démonstration.

Elle se fait par récurrence sur le nombre de sous espaces vectoriels de la filtration. Lorsque la filtration se réduit à un seul sous espace vectoriel $E^1 = E$, c'est la proposition 2. Supposons donc qu'il existe une base e_r adaptée à la filtration $E^1 \subset E^2 \ldots \subset E^r$ de E^r triangulant simultanément les matrices des restrictions des éléments de G à E^r et montrons qu'il existe une base de E^{r+1} ayant les mêmes propriétés. Pour cela considérons E^{r+1}/E^r et désignons par $\widetilde{G} = (\widetilde{g}_j)_{1 \leq j \leq n}$ la famille d'endomorphismes deux à deux permutables induite par G sur E^{r+1}/E^r. Il existe une base e'_{r+1} de E^{r+1}/E^r triangulant simultanément les matrices des endomorphismes de la famille $\widetilde{G}$. Soit e''_{r+1} un relèvement dans E^{r+1} de la base e'_{r+1}. De la stabilité de E^{r+1} par la famille G, résulte que $e_{r+1} = e_r \cup e''_{r+1}$ est une base de E^{r+1} répondant à la question.

4. Soit φ une valuation sur E invariante par une famille $G = (g_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'endomorphismes deux à deux permutables de E.

Définition 6.

On appelle base adaptée de E (à la famille G et à la valuation φ) tout ensemble ordonné (e) de vecteurs de E tel que :

a) (e) est une base de E.

b) Tout vecteur de (e) appartient à un sous espace vectoriel adapté à la famille G.

c) Tous les vecteurs de (e) appartenant à un même sous espace vectoriel adapté à G sont consécutifs et la suite de leurs valuations est décroissante.

d) Les matrices des endomorphismes g_j sont triangulaires dans la base (e).

Lemme fondamental.

L'espace vectoriel E admet une base adaptée.

Démonstration.

Dans chaque sous espace vectoriel adapté à G, prenons une base adaptée à la filtration associée à la valuation induite par φ sur ce sous espace

vectoriel (lemme 1). La réunion de ces bases convenablement ordonnée satisfait au lemme fondamental.

Corollaire 1.

On peut écrire $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E^k$ où la famille $(E^k)_{1 \le k \le r}$ de sous espaces vectoriels de E est adaptée à la famille G. Alors si $(e) = (e^{k,l})_{1 \le k \le r, 1 \le l \le d^k}$ $(d^k = \dim. E^k)$ est une base adaptée, et si l'ordre des E^k est choisi, l'ensemble $\{\varphi(e^{1,1}), \varphi(e^{1,2}), \ldots, \varphi(e^{r,d^r})\}$ ne dépend pas du choix de cette base.

Corollaire 2.

Soient $(D_j)_{1 \le j \le n}$ des matrices carrées deux à deux permutables, il existe une matrice inversible S telle que, pour tout $j = 1,2, \ldots, n$

$$S D_j S^{-1} = \begin{pmatrix} D_j^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_j^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & D_j^r \end{pmatrix}$$

où pour tout $k = 1,2, \ldots, r$ et tout $j = 1,2, \ldots, n$, D_j^k est une matrice triangulaire à valeur propre unique.

Corollaire 3.

Si $(A_j)_{1 \le j \le n}$ est une famille de matrices carrées complexes régulières et deux à deux permutables, la famille de matrices $(\log. A_j)_{1 \le j \le n}$ est également permutable.

5. Soient :

a)
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale possédant les propriétés suivantes :

1°) Les nombres a_j sont entiers positifs,

2°) $a_i \geq a_{i+1}$ pour tout $i = 1,2, \ldots, r-1$,

b) $F = (f_{i,j})$ une matrice nilpotente triangulaire c'est à dire que

$$f_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad i \geq j$$

Proposition 5.

$$\begin{cases} A\,F\,A^{-1} = (c_{i,j}) \text{ avec } c_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j \\ \text{et} \\ c_{i,j} = \dfrac{a_i}{a_j} f_{i,j} \text{ si } i < j \ . \end{cases}$$

La démonstration de cette proposition est immédiate. On en déduit que la fonction $x^A\,F\,x^{-A}$ est un polynôme de degré positif ou nul à coefficients matriciels constants.

B - Désignons par $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, l'algèbre des polynômes à n indéterminées et à coefficients complexes.

Soit $\mathbb{C}_r[X]$, le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes homogènes de degré r. Notons :

- d_r sa dimension.
- $(e_k^r(X))_{(k=1,2,\ldots,d_r)}$ sa base canonique
- $e^r(X) = (e_1^r(X), e_2^r(X), \ldots, e_{d_r}^r(X))$.

Pour tout $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n$, nous noterons $e^r(t)$ la valeur de $e^r(X)$ au point t .

Proposition 6.

Il existe d_r points $t_1, t_2, \ldots, t_{d_r}$ de $\mathbb{C}^n$ tels que :

$$\text{dét.} \begin{pmatrix} e^r(t_1) \\ e^r(t_2) \\ \vdots \\ e^r(t_{d_r}) \end{pmatrix} \neq 0 \ .$$

2. LA NOTION D'ORDRE FINI A L'ORIGINE. L'ESPACE VECTORIEL $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$.

Définition 1.

Un ouvert U de $\mathcal{D}$ est dit distingué s'il possède les deux propriétés suivantes :

a) La projection de U sur le plan de coordonnée de rang j est :

1°) Pour tout $j = 1,2,\ldots, n$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenu dans un secteur angulaire différent du plan tout entier et contenant 0 dans son adhérence.

2°) Pour tout $j = n+1, n+2, \ldots, m$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 dans son adhérence.

b) Il existe deux constantes strictement positives H et K telles que pour tout point $(x_1, x_2 \ldots x_m) \in U$ l'on ait,

$$H \leq \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq K \quad ,$$

pour tout couple (j,k) avec $j<k$.

Définition 2.

Un ouvert U de $\mathcal{R}$ est dit distingué, si la restriction de ψ à U est un homéomorphisme sur un ouvert distingué de $\mathcal{D}$.

Définition 3.

Un élément $f \in \mathcal{H}^{p\times q}(\mathcal{R})$ est dit d'ordre fini à l'origine, s'il existe un élément $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{\substack{Q \to Q_o \\ Q\in U}} \frac{f(Q)}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\lambda_j}} = 0 \quad , \quad Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) \in \mathcal{R} \ ,$$

pour tout ouvert distingué U de $\mathcal{R}$.

Désignons par $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$ le sous ensemble de $\mathcal{H}^{p\times q}(\mathcal{R})$ des éléments qui sont d'ordre fini à l'origine. Il est évident que $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}^{p\times q}(\mathcal{R})$.

Proposition 1.

Le seul élément de $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$ vérifiant (1) pour tout n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est l'élément zéro.

Démonstration.

Soit f un élément $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$ vérifiant (1) pour tout n-uple de $\mathbb{R}^n$ et soit Δ la droite complexe issue de l'origine de $\mathbb{C}^m$ définie par les équations $x_j = t x_j^o$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ avec $x_j^o \neq 0$. La trace de Δ sur $\mathcal{D}$ est un disque $\hat{\Delta}$ centré à l'origine auquel on a enlevé le centre. Désignons par $\mathcal{R}(\hat{\Delta})$ le revêtement universel de $\hat{\Delta}$. Pour toute composante connexe $c \subset \psi^{-1}(\hat{\Delta}) \subset \mathcal{R}$, il existe une application surjective p_c de $\mathcal{R}(\hat{\Delta})$ sur c qui réalise $\mathcal{R}(\hat{\Delta})$ comme revêtement de c. Considérons l'application $\tilde{f}_c = f_c \circ p_c$ où f_c désigne la restriction de f à c. La fonction $\tilde{f}_c$ est d'ordre fini à l'origine $o \in \Delta$ et vérifie

$$\lim_{\substack{Q \to Q_o \\ Q \in U}} \frac{\tilde{f}_c(Q)}{Q^\lambda} = 0 \qquad Q \in \mathcal{R}(\hat{\Delta})$$

pour tout λ réel et tout ouvert distingué U de $\mathcal{R}(\hat{\Delta})$.

Il en résulte que $\tilde{f}_c = 0$ et par suite $f_c = 0$ pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{\Delta})$. Comme le raisonnement que nous venons de faire est valable pour toute droite Δ issue de 0 dans $\mathbb{C}^m$; la fonction f est nulle.

- Considérons le sous ensemble J de $\mathbb{Z}^n$ défini par :

$$J = \{ (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ tel que } 0 \leq i_k - i_r \leq 1 \text{ pour tout couple } (k,r) \text{ vérifiant } k \geq r \}$$

Sur l'ensemble $I = J \cup \{\infty\}$ nous mettons la relation d'ordre totale définie par :

1°) dans J, $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \leq (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ si $i_r \leq i_k$ pour $r = 1, 2, \ldots, n$.

2°) l'élément ∞ est plus grand que tout élément de J.

Pour tout $f \in \mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R}) - \{0\}$ désignons par $I(f)$ l'ensemble des éléments

$(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ de J tel que (1) soit vérifié pour tout n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de R^n vérifiant $\lambda_i < N_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

Proposition 2.

Pour tout $f \in \mathcal{H}_o^{p \times q}(R) - \{0\}$, $I(f)$ admet un élément maximal.

Soit f un élément non nul de $\mathcal{H}_o^{p \times q}(R)$. Il existe un n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que (1) soit réalisé pour cet n-uple. Mais pour tout n-uple $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ vérifiant $\mu_i \leq \lambda_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ on a également (1). En particulier nous avons (1) pour le n-uple $(E(\lambda_1), E(\lambda_2), \ldots, E(\lambda_n)$ où $E(\lambda_i)$ désigne la partie entière de λ_i, donc également pour l'élément de I, $p = (p, p, \ldots, p)$ avec $p = \inf_{1 \leq i \leq n} (E(\lambda_i))$.

Ce qui précède entraine que $I(f)$ n'est pas vide et que ce n'est pas I tout entier. Alors si $I(f)$ n'avait pas d'élément plus grand que tous les autres, on pourrait construire une suite strictement croissante non majorée d'éléments de $I(f)$ et la relation (1) serait vérifiée pour tout n-uple de R^n ce qui contredit l'hypothèse f non nul.

Proposition 3.

L'application φ définie par

$$\varphi(f) = \text{Sup. } I(f) \quad \text{si} \quad f \neq 0$$

$$\varphi(0) = \infty$$

est une valuation sur $\mathcal{H}_o^{p \times q}(R)$.

D'autre part il est facile de vérifier la :

Proposition 4.

Pour tout $\alpha \in \pi_1(\mathcal{D})$ et tout $f \in \mathcal{H}_o^{p \times q}(R)$

$$\varphi(\alpha^* f) = \varphi(f)$$

3. ETUDE DES SOUS ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE DE $\mathcal{H}_o^{p \times 1}(R)$ STABLE PAR LES OPERATIONS DE $\pi_1(\mathcal{D})$. SOUS ESPACES VECTORIELS FAIBLEMENT SINGULIERS A L'ORIGINE.

1. Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie q de $\mathcal{H}_o^{p \times 1}(R)$

stable par les opérations de $\pi_1(\mathcal{L})$. Désignons par $g_1, g_2, \ldots, g_n$ les générateurs de $\pi_1(\mathcal{L})$ vérifiant

$$(g_k^* \log)(Q) = \log. Q + 2\pi i \quad \text{pour tout } Q \in R .$$

Ces générateurs sont <u>deux à deux permutables</u>.

Soit $(e) = (e^{k,l})_{1 \le k \le r,\ 1 \le l \le d^k}$ une base adaptée de E.
Désignons par a_j^k la valeur propre de la restriction de l'automorphisme g_j^* à E^k (c.f. corollaire 1, page I.1 7).

Définition 1.

<u>Les n-uples</u> :

$$\rho^{k,l} = (\rho_1^k + \varphi_1^{k,l}, \rho_2^k + \varphi_2^{k,l}, \ldots, \rho_n^k + \varphi_n^{k,l})$$

$$1 \le k \le r \ , \ 1 \le l \le d^k$$

où $\exp. 2\pi i \rho_j^k = a_j^k \qquad 0 \le \mathrm{Re}\, \rho_j^k < 1$

et $\varphi^{k,l} = \varphi(e^{k,l}) = (\varphi_1^{k,l}, \varphi_2^{k,l}, \ldots, \varphi_n^{k,l}) \in \mathbb{Z}^n$

<u>sont appelés exposants de</u> E <u>à l'origine de</u> $\mathcal{L}$.

Remarque.

Les exposants de $\mathcal{L}$ à l'origine sont à l'ordre près indépendants du choix de la base adaptée.

Nous allons définir maintenant un certain nombre de matrices liées au choix de la base adaptée (e) , ces matrices jouerons un rôle important dans toute la suite.

a)
$$A_j^k = \begin{pmatrix} \beta_j^{k,1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_j^{k,2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \beta_j^{k,d^k} \end{pmatrix}$$

avec $\beta_j^{k,l} = \rho_j^k + \varphi_j^{k,l}$, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le r$.

$$A_j = \begin{pmatrix} A_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & & A_j^r \end{pmatrix}$$

b) Soient : D_j^k , la matrice de la restriction de g_j^* à E^k dans la base $(e^{k,l})_{1 \le l \le d^k}$ (cette matrice est triangulaire et à valeur propre unique) et D_j la matrice

$$\begin{pmatrix} D_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_j^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & D_j^r \end{pmatrix}$$

(c'est la matrice de g_j^* dans la base adaptée (e)).

c) $F_j^k = -\rho_j^k I^k + \frac{1}{2\pi i} \log. D_j^k$ où I^k est la matrice unité d'ordre d^k

$$F_j = \begin{pmatrix} F_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_j^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & F_j^r \end{pmatrix}$$

Soit $T_e = (T_e^1, T_e^2, \dots, T_e^r)$ la matrice associée à la base adpatée (e) de F où T_e^k est pour tout $k = 1,2, \dots, r$ la matrice associée à la base $(e^{k,l})_{1 \le l \le d^k}$ de E^k .

Théorème 1.

La matrice $T_e(Q)$ est de la forme :

$$T_e(Q) = U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j}$$

où U est une (p,q) - matrice holomorphe dans tout D^m .

Remarque 2.

Pour toute base (e') de E , nous avons :

$$T_{e'}(Q) = T_e(Q)\, K_{e',e}$$

où $K_{e',e} \in Gl(q,\mathbb{C})$.

Le théorème 1 résulte de la proposition que nous allons démontrer maintenant et de la règle de multiplication des matrices par blocs.

Proposition 1.

Nous avons, pour tout $k = 1, 2, \ldots, r$

$$T_e^k(Q) = U^k(M) \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j^k} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j^k}$$

où $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$, $M = \psi(Q)$ et où $U^k \in \mathcal{H}^{p \times d^k}(D^m)$.

Démonstration.

Pour simplifier l'écriture, nous supprimerons dans cette démonstration l'indice k et l'indice e .

Considérons la matrice :

$$W(Q) = T(Q) \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j}$$

et posons $E_j = \frac{1}{2\pi i} \log. D_j$ et $\tilde{A}_j = A_j - \rho_j I$

comme $F_j = -\rho_j I + E_j$, il vient :

$$W(Q) = T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-E_j} \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\tilde{A}_j} .$$

La démonstration se fait en deux étapes :

1°) Il existe une matrice U holomorphe sur $\mathcal{D}$ telle que

$$W = U \circ \psi .$$

Comme $\tilde{A}_j$ est une matrice diagonale à coefficients entiers, il suffit de montrer

que la matrice H holomorphe sur $\mathcal{R}$ définie par :

$$H(Q) = T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-E_j}$$

se factorise par ψ, c'est à dire est invariante par g_h^* pour tout $h = 1, 2, \ldots, n$. Mais pour tout h nous avons :

$$(g_h^* H)(Q) = T(Q)\, D_h \times \prod_{j=1}^{h} Q_j^{-E_j} \times \exp.(-2\pi i E_h) \times \prod_{j=h+1}^{n} Q_j^{-E_j} \quad ;$$

car, pour tout couple (h,j), D_h et D_j permutent, E_j est un polynôme en D_j, et $\exp.(-2\pi i E_j) = D_j^{-1}$.

2°) La matrice U se prolonge holomorphiquement à l'origine.

Dans $\mathcal{D}$, U est développable en série de Laurent matricielle en les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dans ce développement, il n'y a aucune puissance négative des variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m$. Il en résulte que, pour prouver que U est holomorphe dans D^m, il suffit de montrer que pour une suite de nombres réels positifs $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ vérifiant :

$$0 \leq \mathrm{Re}\, \rho_j + 2\epsilon_j < 1 \quad ,$$

$$\lim_{Q \to Q_o} U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\rho_j + 2\epsilon_j} = 0 \quad .$$

Cette limite étant à prendre au sens de la définition 3 du § 2. Or :

$$U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\rho_j + 2\epsilon_j}$$

$$= T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-E_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\tilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\rho_j + 2\epsilon_j}$$

$$= T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\tilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{2\epsilon_j}$$

$$= \left(T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\tilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\epsilon_j}\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\tilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\tilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\epsilon_j}\right.$$

Mais :

a) $$T(Q)\times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varepsilon_j}$$

$$= \left(\frac{e^1}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^1}} , \frac{e^2}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^2}} ,\ldots, \frac{e^d}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^d}}\right) \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varepsilon_j}$$

$$= \left(\frac{e^1}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^1 - \varepsilon_j}} , \frac{e^2}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^2 - \varepsilon_j}} ,\ldots, \frac{e^d}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^d - \varepsilon_j}}\right)$$

qui tend vers zéro car

$$\varphi(e^h) = (\varphi_1^h , \varphi_2^h ,\ldots, \varphi_n^h) = \varphi^h .$$

b) La fonction

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j}$$

est un polynôme de degré positif ou nul en les variables Q_j et $\log.Q_j$ (j=1,2,...n), en effet :

1°) La matrice F_j étant nilpotente,

$$Q_j^{-F_j} = \exp.(-F_j \log. Q_j)$$

est un polynôme de degré positif ou nul en F_j à coefficients polynômes de degré positif ou nul en les variables $\log. Q_j$ (j=1,2 ,..., n) . Donc $\prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j}$ est un polynôme de degré positif ou nul en les variables $F_1 , F_2 ,..., F_n$, dont les coefficients sont des polynômes de degré positif ou nul en les variables $\log. Q_1 , \log. Q_2 ,..., \log. Q_n$.

2°) La fonction

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{n} F_j^{p_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j} \qquad (p_j \text{ entier pour tout } j)$$

est un polynôme de degré positif ou nul en les variables $Q_1 , Q_2 ,..., Q_n$ à coefficients matriciels constants. (Application répétée de la proposition 5,§1, pag 8).

Donc après multiplication par $\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\epsilon_j}$, la fonction

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j}$$

tend vers zéro au sens de la définition 3 du § 2 . Les résultats de a) et b) entrainent que

$$\lim. \; U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\rho_j + 2\epsilon_j} = 0$$

Et par suite U est holomorphe dans D^m .

2. Si (e) et (e') sont deux bases adaptées de E , nous avons :

$$T_e(Q) = U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j} \quad \text{où} \quad U \in \mathcal{H}^{p \times q}(D^m)$$

$$T_{e'}(Q) = U'(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A'_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F'_j} \quad \text{où} \quad U' \in \mathcal{H}^{p \times q}(D^m)$$

Mais : $(e') = (e)S$ où $S \in Gl(q, \mathbb{C})$;

donc,

$$T_{e'}(Q) = T_e(Q)S$$

et pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$

$$D'_j = S^{-1} D_j S \qquad A'_j = S^{-1} A_j S .$$

Ce qui entraine après un calcul immédiat que

$$U'(M) = U(M)S \text{ , donc :}$$

Proposition 2.

Les deux matrices U(M) et U'(M) ont même rang.

Définition 2.

Un sous espace vectoriel de dimension finie q de $\mathcal{H}_o^{p \times 1}(\mathbb{R})$ est dit faiblement singulier à l'origine si :

1°) E est stable par les opérations de Π_1 ($\mathcal{O}$)

2°) Pour une base adaptée de E , la matrice $U(0)$ est de rang maximum.

Pour tout $k = 1, 2, \ldots, r$, désignons par $(E^k_u)_{1 \le u \le u_k}$ la filtration strictement croissante du sous espace vectoriel adapté E^k associée à la restriction φ^k à E^k de la valuation φ . Posons :

- d^k_u = dimension de E^k_u $\qquad 1 \le u \le u_k$,
- m^k_u = dimension E^k_u / E^{k-1}_u $\qquad 1 \le u \le u_k$,
- $E^k_o = \{0\}$ et $m^k_o = 0$.

Nous avons

$$d^k_{u_k} = d^k = \text{dim. } E^k \quad \text{et} \quad \sum_{s=1}^{u} m^k_s = d^k_u \ .$$

Si $(e^{k,l})_{1 \le l \le d^k \ ; \ 1 \le k \le r}$ est la base adaptée choisie,

$$\varphi(e^{k,l}) = \varphi(e^{k,d^k_u})$$

pour tout l vérifiant $d^k_{u-1} + 1 \le l \le d^k_u$ et tout $k = 1,2 ,,.., r$.

Nous allons introduire une notation qui nous sera utile dans la suite. Si B est la matrice d'un endomorphisme de E dans la base adaptée (e) , celle ci se présente sous la forme de blocs $(B_{k,t})_{1 \le k \le r \ , \ 1 \le t \le r}$ à d^k lignes et à d^t colonnes. Chacun de ces blocs étant lui-même à nouveau sous forme de blocs $(B_{k,t})^{m^k_u \ , \ m^k_v}$ à m^k_u lignes et m^k_v colonnes, où $1 \le u \le u_k$ et $1 \le v \le u_k$.
Nous noterons alors B^o la matrice

$$\begin{pmatrix} B^o_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B^o_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & B^o_{r,r} \end{pmatrix}$$

avec

$$D^{\circ}_{k,k} = \begin{pmatrix} (B_{k,k})_{m_1^k,\, m_1^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (B_{k,k})_{m_2^k,\, m_2^k} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & (B_{k,k})_{m_{u_k}^k,\, m_{u_k}^k} \end{pmatrix}$$

Nous avons évidemment

$$A^{\circ} + B^{\circ} = (A + B)^{\circ}$$

$$A^{\circ}\, B^{\circ} = (AB)^{\circ} \quad \text{et} \quad I^{\circ} = I$$

Posons pour tout $j = 1,2 ,..., n$

$$\tilde{L}_j = \tilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i} \log. D_j^{\circ} \ .$$

Lemme 1.

Les matrices L_j $(j = 1,2 ,..., n)$ sont deux à deux permutables.

Pour démontrer le lemme il suffit de regarder la décomposition en blocs de ces matrices, donc de vérifier que les matrices

$$\tilde{L}_j^k = \tilde{A}_j^k + \frac{1}{2\pi i} \log. (D_j^k)^{\circ}$$

où $j = 1,2 ,..., n$ et où k est fixé, sont deux à deux permutables. Or dans le sous espace vectoriel E^k, nous avons la nouvelle décomposition en blocs

$$\tilde{A}_j^k = \begin{pmatrix} \tilde{A}_j^{k,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_j^{k,2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \tilde{A}_j^{k,u_k} \end{pmatrix}$$

avec $$\tilde{A}_j^{k,u} = \varphi_j^{k,d_u^k}\, I_u^k \qquad 1 \le u \le u_k \ ,$$

où I_u^k est la matrice unité d'ordre m_u^k .

D'autre part :

$$\log.(D_j^k)^0 = \begin{pmatrix} \log.(D_j^k)_{m_1^k}\,,\, m_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log.(D_j^k)_{m_2^k}\,,\, m_2^k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \log.(D_j^k)_{m_{u_k}^k}\,,\, m_{u_k}^k & \end{pmatrix}.$$

Ces décompositions entrainent que pour tout k fixé et tout couple (j,l) $(1 \leq j \leq n\ ,\ 1 \leq l \leq n)$, les matrices $\widetilde{A}_j^k$ et $\log.(D_l^k)$ sont permutables. Il en résulte que pour tout k, la famille de matrices $(\widetilde{L}_j^k)$ est permutable et donc également la famille de matrices $(\widetilde{L}_j)_{1 \leq j \leq n}$. Désignons par $\widetilde{l}_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ les endomorphismes de E (rapporté à la base adaptée (e)) définis par les matrices deux à deux permutables $\widetilde{L}_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Soit N le noyau de l'application linéaire u de E dans $\mathbb{C}^p$ défini par la matrice $U(0)$.

Théorème 2.

Si $q \leq p$ et si N est invariant par les endomorphismes $\widetilde{l}_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ l'espace vectoriel E est faiblement singulier à l'origine.

Comme $q \leq p$, il suffit de montrer que $N = \{0\}$. Supposons le contraire, N étant invariant par les endomorphismes $\widetilde{l}_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, ceux-ci ont un vecteur propre commun w appartenant à N.

Si on désigne, pour tout k $(k = 1,2,\ldots,r)$ et tout u $(u = 1,\ldots,u_k)$ par $\widetilde{E}_u^k$ le sous espace vectoriel de E^k engendré par les vecteurs

$$(e^{k,d_{u-1}^k}, e^{k,d_{u-1}^k+2}, \ldots, e^{k,d_u^k}) .$$

Nous avons :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \left(\bigoplus_{u=1}^{u_k} \widetilde{E}_u^k \right) .$$

Et la famille de sous espaces vectoriels $(\widetilde{E}_u^k)_{1\leq k\leq r\ ,\ 1\leq u\leq u_k}$ est adaptée à la famille d'endomorphismes $\widetilde{l}_j$. Il en résulte, l'existence d'un couple d'indice (k,u) tel que $w\in\widetilde{E}_u^k$ donc :

$$w = \sum_{t=d_{u-1}^k+1}^{d_u^k} w^{k,t}\ e^{k,t} \quad .$$

Les valeurs propres de w pour les endomorphismes $\widetilde{l}_1,\widetilde{l}_2,\ldots,\widetilde{l}_n$ sont donc respectivement

$$\beta_1^{k,u}\ ,\ \beta_2^{k,u}\ ,\ldots,\ \beta_n^{k,u}$$

avec

$$\beta_j^{k,u} = \rho_j^k + \varphi_j^{k,d_u^k} \quad .$$

Désignons par v la matrice colonne des composantes de w dans la base $(e^{k,l})$ de E . Nous avons :

$$Q^{-A}\, v = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta_j^{k,u}}\ v \quad \text{et} \quad F_j^o\, v = 0 \quad \text{avec}$$

$$F_j^o = \widetilde{A}_j - A_j + \frac{1}{2\pi i}\ \log.\ D_j^o$$

donc :

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta_j^{k,u}}\ w = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta_j^{k,u}}\ T_e\,(Q)\ v$$

$$= U\,(M)\ Q^A\ Q^F\ Q^{-A}\ v$$

$$= U(M)\ (Q^A\ \exp.\ (\sum_{j=1}^{n} F_j\ \log.Q_j)\ Q^{-A})\ v$$

$$= U(M)\ v + (U(M) \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t\,!}\ (\sum_{j=1}^{n} Q^A F_j Q^{-A}\ \log.Q_j)^t)\ v\ .$$

La somme étendue à l'indice t est finie car les matrices F_j $(j=1,2,\ldots,n)$ sont nilpotentes et deux à deux permutables.

$$\prod_{j=1}^{n} Q^{-\beta_j^{k,u}}\ w = U(M)\ v + (U\,(M)\,(\sum_{t=1}^{\infty}\ \frac{1}{t\,!}\ (\sum_{j=1}^{n}\ (F_j^o + \omega_j\,(Q))\log.\ Q_j)^t)\ v$$

où $\omega_j\,(Q)$ est un polynôme en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à coefficients

matriciels et sans terme constant. On peut alors écrire :

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta_j^{k,u}} w = U(M)\, v + U(M) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{t!} \left(\sum_{j=1}^{n} F_j^o \log. Q_j \right)^t + H(Q) \right) v ,$$

et comme $F_j^o v = 0$ pour tout j, nous avons :

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta_j^{k,u}} w = U(M)v + U(M)\, H(Q)v ,$$

où $H(Q)$ est un polynôme en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \log. Q_1, \log. Q_2, \ldots, \log. Q_n$ dont les monômes ont un degré strictement positif par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Posons $U^*(M) = U(M) - U(0)$, alors comme $U(0)v = 0$

$$w = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u}} \left(U^*(M)v + U(M)\, H(Q)v \right) .$$

Nous avons fait l'hypothèse $N \neq \{0\}$ et nous avons introduit le vecteur w, si nous montrons que la valuation $\varphi(w)$ de w est différente de φ^{k,d_u^k}, nous aurons la contradiction cherchée.

Le n-uple φ^{k,d_u^k} est de la forme

$$\underbrace{(q, q, \ldots, q}_{t \text{ fois}}, \underbrace{q+1, q+1, \ldots, q+1)}_{n-t \text{ fois}}$$

avec $1 \leq t \leq n$ et $q = \varphi_j^{k,d_u^k}$ si $1 \leq j \leq t$.

Considérons un n-uple $= (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\lambda_j < q \quad \text{pour} \quad j < t$$

$$\lambda_j < q+1 \quad \text{pour} \quad j < t$$

$$q < \lambda_t < q+1$$

et montrons que :

$$\lim_{\substack{Q \to Q_o \\ Q \in U}} \frac{w}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\lambda_j}} = 0 ,$$

ce qui entrainera que $\varphi(w) \neq \varphi^{k,d_u^k}$. Pour établir ce résultat, nous allons étudier les deux expressions :

$$\mathcal{A} = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u} - \lambda_j} U^*(M)\, v$$

$$\mathcal{B} = \left(\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u} - \lambda_j}\right) U(M)\, H(Q)\, v \quad .$$

1°) Etude de $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u} - \lambda_j}\right) \times \left(Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t}\right) U^*(M)\, v \ ,$$

or $\beta_j^{k,u} = \varphi_j^{k,d_u^k} + \rho_j^k$ avec $0 \leq \mathrm{Re.}\ \rho_j^k < 1$

et $\lambda_j < \varphi_j^{k,d_u^k}$,

il en résulte que la première parenthèse figurant dans $\mathcal{A}$ tend vers zéro lorsque Q tend vers Q_o en restant dans un ouvert distingué de $\mathfrak{R}$. Nous allons montrer maintenant qu'il en est de même du deuxième facteur.

Posons : $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_m^{s_m}$ où $s_j \in \mathbb{N}$ pour tout j .

$$|x|^s = |x_1|^{s_1} |x_2|^{s_2} \ldots |x_m|^{s_m}$$

$$a_s = a_{s_1, s_2, \ldots, s_m} \ .$$

La série $U(M) = \sum_{s \in \mathbb{N}^m} a_s x^s$

converge normalement dans un voisinage d'un polydisque fermé $\Delta^m \subset D^m$ avec

$$\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \delta \} \ .$$

Comme les limites sont à prendre pour Q variant dans un ouvert distingué de $\mathfrak{R}$, il existe deux constantes strictement positives h et k telles que :

$$h \leq \frac{|x_j|}{|x_t|} \leq k \qquad \text{si} \quad j < t$$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{|x_j|}{|x_t|} \leq \frac{1}{h} \qquad \text{si} \quad t < j \leq m \ .$$

Posons : $K = \text{Sup} \{k , \frac{1}{h} , 1\}$.

Il en résulte que :

$$\| Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} U^*(M) \| \leq |Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t + \alpha_t}| L(K |x_t|) ,$$

où α_t est un entier strictement positif et où L est une fonction bornée au voisinage de l'origine.

Comme : $$\varphi_t^{k,d_u^k} < \lambda_t < \varphi_t^{k,d_u^k} + 1$$

$$0 \leq \text{Re } \rho_t^k < 1 \quad ,$$

nous avons : $\text{Re.} (\beta_t^{k,u} - \lambda_t + \alpha_t) > 0$

et par suite : $$\text{Lim.} \left| Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t + \alpha_t} \right| = 0 \ .$$

Ce qui entraine que $\mathscr{A}$ tend vers zéro lorsque Q tend vers Q_o en restant dans un ouvert distingué de $\mathcal{R}$.

2°) Etude de $\mathscr{S}$

$$\mathscr{S} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u} - \lambda_j} , \times (Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} U(M) H(Q) v) .$$

Le premier facteur tend vers zéro, nous l'avons vu dans le 1°) . Le deuxième facteur peut s'écrire :

$$U(M) Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} H(Q) v .$$

La matrice colonne v étant à coefficient constants, il suffit d'étudier

l'expression $$Q_t^{\beta_t^{k,u}} e^{-\lambda_t H(Q)} .$$

or cette matrice est combinaison linéaire finie à coefficients matriciels constants d'expressions de la forme :

$$Q_t^{\beta_t^{k,u}} e^{-\lambda_t} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \prod_{j=1}^{n} (\log. Q_j)^{\gamma_j}$$

où les nombres α_j , γ_j sont des entiers, l'un au moins des α_j n'étant pas nul. Or une telle expression tend vers zéro lorsque Q tend vers Q_o en restant dans un ouvert distingué de $\mathcal{R}$; en effet il suffit de voir qu'une expression de la forme

$$Q_t^{\beta_t^{k,u}} e^{-\lambda_t} x_h^{\alpha_h} \prod_{j=1}^{n} (\log. Q_j)^{\lambda_j} \qquad \alpha_h > 0$$

tend vers zéro. Mais si K a la même signification que ci-dessus nous avons :

$$\left| Q_t^{\beta_t^{k,u}} e^{-\lambda_t} x_h^{\alpha_h} \prod_{j=1}^{n} (\log. Q_j)^{\gamma_j} \right| \leq K^{\alpha_h} \left| x_t \right|^{\mathrm{Re.}(\rho_t^k + \varphi_t^{k,d_u^k} - \lambda_t + \alpha_h)} \left| \prod_{j=1}^{n} (\log. Q_j)^{\gamma_j} \right|$$

avec

$$\mathrm{Re.}\ (\rho_t^k + \varphi_t^{k,d_u^k} - \lambda_t + \alpha_h) > 0$$

et cette expression tend vers zéro lorsque Q tend vers Q_o en restant dans un ouvert distingué de $\mathcal{R}$. Ce qui montre le théorème 2.

4. SYSTEME DE PFAFF ASSOCIÉ A UN SOUS ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE p DE $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathcal{R})$ FAIBLEMENT SINGULIER A L'ORIGINE.

Théorème 1.

Tout sous espace vectoriel E de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathcal{R})$ de dimension finie p , faiblement singulier à l'origine est l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff complètement intégrable de la forme :

$$df = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{P_j(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{x_j} dx_j + \sum_{j=n+1}^{m} P_j(x_1,x_2,\ldots,x_m)\, dx_j \right) f$$

où pour tout $j = 1,2,\ldots,m$; P_j est une matrice carrée d'ordre p méromorphe sur D^m et holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^m$.

Corollaire 1.

Les exposants de E sont donnés par les valeurs propres des matrices $P_j(0)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, de manière plus précise, on a pour tout $j = 1,2,\ldots,n$:

$$P_j(0) = U(0)\left(\widetilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i}\ \text{log. } D_j^o\right) U(0)^{-1}$$

(Les notations sont celles des paragraphes 2 et 3) .

Démonstration du théorème 1.

Si (e) est une base adaptée de E nous avons :

$$T_e(Q) = U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j}$$

avec $U \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$ et dét. $U(0) \neq 0$.

Désignons par B , le sous ensemble analytique de D^m défini par dét. $U(M) = 0$, il existe un polydisque $D'^m \subset D^m$ tel que $B \cap D'^m = \emptyset$.
La forme différentielle

$$\omega = (dT_e)\,(T_e)^{-1}$$

est uniforme et nous avons sur

$$\omega(Q) = dU \times U^{-1} + U\Big(\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{dx_j}{x_j} + \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{x_j}\,dx_j\Big) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j}\Big) U^{-1} .$$

Comme :

a) La forme différentielle $dU\ U^{-1}$ est méromorphe sur D^m et holomorphe sur D'^m ;

b) La fonction matricielle

$$\mathcal{A}_h(Q) = A_h + \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times F_h \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j}$$

est pour tout $h = 1,2,\ldots, n$, holomorphe sur D^m ; en effet, utilisant la décomposition en blocs des matrices A_j et F_h (c.f. page I.3.13), il suffit de prouver que les matrices

$$A_h^k + \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j^k} \times F_h^k \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j^k} \quad , \quad h = 1,2,\ldots, n \; ; \; k = 1,2,\ldots,r$$

sont holomorphes sur D^m. Mais (cf. page I.3.16) ces fonctions matricielles sont des polynômes en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à coefficients matriciels constants.

Il en résulte que les fonctions matricielles

$$P_j(x_1,x_2,\ldots, x_m) = x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} U^{-1} + U' \mathcal{A}_j(Q)) \; U^{-1})$$

$$(j = 1,2,\ldots, n)$$

et

$$P_j(x_1,x_2,\ldots, x_m) = \frac{\partial U}{\partial x_j} U^{-1} \quad ,$$

$$(j = n+1, n+2,\ldots, m)$$

sont méromorphes sur D^m et holomorphes sur D'^m.

Démonstration du corollaire.

Nous avons pour $j = 1,2,\ldots, n$

$$P_j(x_1, x_2,\ldots, x_m) = x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} U^{-1} + U (A_j + \prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t} \times F_j \times \prod_{t=1}^{n} Q_t^{-A_t}) U^{-1}$$

donc

$$P_j(0) = U(0) (A_j + (\prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t} \times F_j \times \prod_{t=1}^{n} Q_t^{-A_t}) (0)) \; U^{-1}(0) .$$

Si on considère la décomposition en blocs des matrices A_j et F_j associées aux

sous espaces vectoriels adaptés E^k, nous sommes amenés à étudier les matrices :

$$(A_j^k + \prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t^k} \times F_j^k \times \prod_{t=1}^{n} Q_t^{-A_t^k})\ (0)\ .$$

Si on utilise maintenant la décomposition en blocs des matrices A_j^k et F_j^k, associée pour tout k, à la filtration de E^k déduite de la valuation φ^k, nous avons :

$$A_j^k = \begin{pmatrix} A_j^{k,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_j^{k,2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_j^{k,u_k} \end{pmatrix} ,$$

$$F_j^k = \begin{pmatrix} (F_j^k)_{m_1^k, m_1^k} & (F_j^k)_{m_1^k, m_2^k} & \cdots & (F_j^k)_{m_1^k, m_{u_k}^k} \\ 0 & (F_j^k)_{m_2^k, m_2^k} & \cdots & (F_j^k)_{m_2^k, m_{u_k}^k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & (F_j^k)_{m_{u_k}^k, m_{u_k}^k} \end{pmatrix} .$$

D'où résulte vu l'expression des $A_j^{k,u}$ (multiple de la matrice unité de même ordre, le facteur étant un exposant de E) que

$$(\prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t^k} F_j^k \prod_{t=1}^{n} Q^{-A_t^k})\ (0) = (F_j^k)^0 .$$

Comme

$$(F_j^k)_{m_u^k, m_u^k} = -\rho_j^k\ I_u^k + \frac{1}{2\pi i}\ (\log.\ D_j^k)_{m_u^k, m_u^k}$$

I_u^k désignant la matrice unité d'ordre m_u^k .

Nous avons :

$$A_j^k + \left(\prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t^k} \times F_j^k \times \prod_{t=1}^{n} Q_t^{-A_t^k}\right)(0)$$

$$= \tilde{A}_j^k + \frac{1}{2\pi i}(\log.D_j^k)^o \quad \text{avec} \quad \tilde{A}_j^k = A_j^k - \rho_j^k I_u^k .$$

Mais vu la définition du logarithme d'une matrice et les propriétés de l'opération o ;

$$P_j(0) = U(0)\left(\tilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i}\log.(D_j)^o\right) U(0)^{-1} .$$

Ce qui prouve le corollaire.

§ 5. ETUDE DES SOUS ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE DE $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(\mathbb{R})$ FAIBLEMENT SINGULIERS A L'ORIGINE.

1. Considérons l'algèbre sur $\mathbb{C}$ qu'engendrent les opérateurs

$$\theta_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad j = 1,2,\ldots, n$$

$$\theta_o = \text{id.} \quad .$$

Cette algèbre est identique à l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[\theta] = \mathbb{C}[\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n]$. Nous notons (cf. page I.1. 8) :

a) Θ_{d_r} l'application de $\mathcal{H}^{1\times 1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}^{d_r\times 1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Theta_{d_r} f = \begin{pmatrix} e_1^r(\theta) f \\ e_2^r(\theta) f \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{d_r}^r(\theta) f \end{pmatrix} \text{ si } r > 0 \text{ et } \Theta_{d_o} f = f \ .$$

b) Θ^{d^q} l'application de $\mathcal{H}^{1x1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}^{d^q x 1}(\mathbb{R})$ $(d^q = \sum_{i=0}^{q} d_r)$ définie par :

$$\Theta^{d^q} = \begin{pmatrix} \Theta_{d_o} \\ \Theta_{d_1} \\ \vdots \\ \Theta_{d_q} \end{pmatrix} .$$

Définition 1.

On appelle opérateur d'ordre s extrait de Θ^{d^q}, toute application Θ^s de $\mathcal{H}^{1x1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}^{sx1}(\mathbb{R})$ obtenue en prenant seulement s lignes de l'opérateur Θ^{d^q}.

Définition 2.

Un opérateur d'ordre s extrait de Θ^{d^q} est dit privilégié, s'il contient la première ligne de Θ^{d^q}.

Proposition 1.

Tout opérateur extrait de Θ^{d^q}, permute avec les endomorphismes g^* pour tout $g \in \pi_1(\mathcal{O})$.

Proposition 2.

Si E est un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{1x1}(\mathbb{R})$, alors tout opérateur privilégié Θ^s extrait de Θ^{d^q}, réalise un isomorphisme de E sur un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{sx1}(\mathbb{R})$.

Le fait que θ_o est une ligne de Θ^s entraine immédiatement cette proposition.

Remarque 1.

Si l'opérateur extrait n'est pas privilégié, il ne réalise pas en général un isomorphisme ; en effet considérons l'espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ engendré par les deux fonctions $f_1 = x_1 - x_2$ et $f_2 = x_1 + x_2$. L'opérateur non pri-

vilégié $\theta_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ne réalise pas un isomorphisme de E sur $\theta_2(E)$ car $\theta_2(E)$ est engendré par les deux fonctions $g_1 = -x_2$ et $g_2 = x_2$ qui ne sont pas $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

2. Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(\mathbb{R})$ faiblement singulier à l'origine.

Théorème 1.

L'application $\Theta^{d^{p-1}}$ réalise un isomorphisme de E sur un sous espace vectoriel E' de dimension p de $\mathcal{H}_o^{c^{p-1}\times 1}(\mathbb{R})$ possédant les propriétés suivantes :

a) E' est faiblement singulier à l'origine ,

b) E et E' ont même ensemble d'exposants.

Corollaire 1.

Il existe au moins un opérateur privilégié Θ^p , d'ordre p , extrait de $\Theta^{d^{p-1}}$, réalisant un isomorphisme de E sur un sous espace vectoriel de dimension p de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathbb{R})$, possédant les propriétés a) et b) .

Corollaire 2.

E est l'espace vectoriel des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable de la forme :

$$d\,(\Theta^p f) = \omega\,(\Theta^p f)\ ,$$

où

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{x_j}\, dx_j + \sum_{j=n+1}^{m+1} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_j$$

et où pour tout $j = 1, 2, \ldots, m$, $P_j \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$, et Θ^p est un opérateur privilégié d'ordre p , extrait de $\Theta^{d^{p-1}}$.

Remarque 2.

Le système obtenu, est formé par un certain nombre d'équations aux dérivées partielles qui ne sont pas en général indépendantes. C'est à dire que très souvent il est possible d'en supprimer quelques unes sans pour autant

changer l'espace vectoriel des solutions. La détermination du nombre minimum d'équations nécessaires est dans le cas général un problème difficile.

Démonstration du théorème 1.

Soit (e) une base adaptée de E, nous avons :

$$(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_p) = U(M)\, Q^A\, Q^F \quad ,$$

avec

$$Q^A = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \quad , \quad Q^F = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j} \quad .$$

Calculons :

$$\theta_j((e)) = (\theta_j e_1, \theta_j e_2, \ldots, \theta_j e_p) = \theta_j(U(M))Q^A Q^F + U(M)(A_j + Q^A F_j Q^{-A})Q^A Q^F$$

$$= U_j(M)\, Q^A\, Q^F \quad ,$$

où $U_j(M) \in \mathcal{H}^{1\times p}(D^m)$

et $U_j(0) = U(0)\,\tilde{L}_j$ avec $\tilde{L}_j = \tilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i}\log.D_j^0$.

Nous savons que les matrices $\tilde{L}_j$ sont deux à deux permutables. Montrons maintenant, que pour tout n-uple d'entiers positifs ou nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, il existe une fonction $U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \in \mathcal{H}^{1\times p}(D^m)$ telle que :

$$(2) \qquad (\theta_1^{\alpha_1}\theta_2^{\alpha_2}\ldots\theta_n^{\alpha_n})((e)) = U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(M)\, Q^A\, Q^F$$

avec

$$(3) \qquad U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(0) = U(0)\,\tilde{L}_1^{\alpha_1}\tilde{L}_2^{\alpha_2}\ldots\tilde{L}_n^{\alpha_n} \quad .$$

Ces formules se démontrent par récurrence ; sachant que les opérateurs θ_j permutent, il suffit de montrer (2) et (3) en supposant que :

$$(2') \qquad (\theta_1^{\alpha_1-1}\theta_2^{\alpha_2}\ldots\theta_n^{\alpha_n})((e)) = U^{\alpha_1-1,\alpha_2\ldots\alpha_n}(M)\, Q^A\, Q^F \quad ,$$

$$U^{\alpha_1-1,\alpha_2\ldots\alpha_n}(M) \in \mathcal{H}^{1\times p}(D^m) \quad ,$$

$$(3') \qquad U^{\alpha_1-1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(0) = U(0)\,\tilde{L}_1^{\alpha_1-1}\,\tilde{L}_2^{\alpha_2}\ldots\tilde{L}_n^{\alpha_n} \quad .$$

De (2') on déduit :

$$(\theta_1^{\alpha_1}\,\theta_2^{\alpha_2}\ldots\theta_n^{\alpha_n})((e)) = \theta_1(U^{\alpha_1-1,\alpha_2\ldots\alpha_n}(M))Q^A\,Q^F + U^{\alpha_1-1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(M)(A_1+Q^AF_1Q^{-A})Q^AQ^F$$

$$= U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(M)\,Q^A\,Q^F$$

avec

$$U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(M) \in \mathcal{H}^{1\times p}(D^m) \ ,$$

et à l'aide de (3') ,

$$U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(0) = U^{\alpha_1-1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(0)\,\tilde{L}_1$$

$$= U(0)\,\tilde{L}_1^{\alpha_1-1}\tilde{L}_2^{\alpha_2}\ldots\tilde{L}_n^{\alpha_n}\tilde{L}_1$$

$$= U(0)\,\tilde{L}_1^{\alpha_1}\,\tilde{L}_2^{\alpha_2}\ldots\tilde{L}_n^{\alpha_n} \quad .$$

Ce qui prouve les formules (2) et (3) . Ces formules entrainent alors

$$(4) \qquad \Theta^{d^{p-1}}((e)) = \mathcal{U}(M)\,Q^A\,Q^F$$

où $\mathcal{U}(M) \in \mathcal{H}^{d^{p-1}\times p}(D^m)$.

Il reste à prouver que le rang de $\mathcal{U}(0)$ est maximum c'est à dire p . Pour cela nous allons montrer que le noyau de l'application linéaire u de E dans $\mathbb{C}^{d^{p-1}}$ définie par la matrice $\mathcal{U}(0)$ se réduit à $\{0\}$. Si $\tilde{l}_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ désignent les endomorphismes de E définis par les matrices $\tilde{L}_j$, nous avons :

Lemme 1.

N est invariant par la famille d'endomorphismes $(\tilde{l}_j)_{1\le j\le n}$.

Le résultat a) du théorème 1 est une conséquence immédiate de ce lemme et du théorème 2 du § 3 (page I.3.20).

La formule (4) et le fait que si (e) est une base adaptée de E , $\Theta^{d^{p-1}}((e))$ est une base adaptée de E' entrainent que E et E' ont même

ensemble d'exposants.

Démonstration du lemme1.

Soit v un élément non nul de N, nous désignerons également par v la matrice colonne des composantes de v dans la base (e), nous avons :

$$\mathcal{U}(0)\, v = 0 .$$

En d'autres termes, si pour tout n-uple d'entiers positifs ou nuls $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ on pose

$$H_s^{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n}(v) = U(0)\,\Big(\prod_{j=1}^{n} \widetilde{L}_j^{\,j}\Big)\, v$$

où $$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j ,$$

nous avons alors, pour tout $s = 1,2,\ldots, p-1$ et tout n-uple $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ d'entiers positifs ou nuls vérifiant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = s$:

$$H_s^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(v) = 0 .$$

Pour montrer que N est invariant par la famille d'endomorphismes deux à deux permutables $(\widetilde{L}_j)_{1\le j\le n}$, il suffit de montrer que l'on a également

$$H_p^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(v) = 0$$

pour tout n-uple d'entiers positifs ou nuls $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ vérifiant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = p$. Si $(t_j)_{1\le j\le n}$ désignent n nombres complexes quelconque, le théorème de Cayley-Hamilton appliqué à l'endomorphisme $\sum_{j=1}^{n} t_j \widetilde{L}_j$ entraîne que

$$U(0)\,\Big(\sum_{j=1}^{n} t_j \widetilde{L}_j\Big)^p v = 0$$

C'est à dire que

$$(5) \qquad \sum t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \ldots t_n^{\alpha_n}\, U(0)\, \widetilde{L}_1^{\alpha_1}\widetilde{L}_2^{\alpha_2}\ldots\widetilde{L}_n^{\alpha_n}\, v = 0$$

la somme étant étendue à tous les n-uples $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ vérifiant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = p$. Nous supposerons que les monômes en $t_1,t_2,\ldots,t_n$ dans la somme ci-dessus, sont rangés dans l'ordre indiqué pour la base canonique de $\mathbb{C}_p[t_1,t_2,\ldots,t_n]$.

D'après la proposition 6 du § 1 (page 8) il existe d_p points de $\mathbb{C}^K$, $t^1, t^2, \ldots, t^{d_p}$ tels que

$$\det. \begin{pmatrix} e^p(t^1) \\ e^p(t^2) \\ \vdots \\ e^p(t^{d_p}) \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Et en écrivant la formule (5) pour tous ces points, on obtient un système linéaire à d_p équations à coefficients dans $\mathbb{C}$, en les inconnues matricielles $U(0) \tilde{L}_1^{\alpha_1} \tilde{L}_2^{\alpha_2} \ldots \tilde{L}_n^{\alpha_n} v$. Le déterminant de ce système n'étant pas nul on en conclut que :

$$U(0) \tilde{L}_1^{\alpha_1} \tilde{L}_2^{\alpha_2} \ldots \tilde{L}_n^{\alpha_n} v = 0$$

pour tout n-uples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de $\mathbb{N}^n$ vérifiant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = p$. En d'autres termes le noyau N de u est invariant par la famille d'endomorphismes $(\tilde{L}_j)_{1 \leq j \leq n}$.

Démonstration du corollaire 1.

Comme E est faiblement singulier à l'origine, la première ligne de $\mathcal{U}(0)$ n'est pas nulle, il est donc possible d'extraire de $\mathcal{U}(0)$ une matrice carrée $\mathcal{U}_p(0)$ d'ordre et de rang p, contenant la première ligne de $\mathcal{U}(0)$. Soit Θ^p l'opérateur privilégié extrait de Θ^{dp-1} et obtenu en prenant les lignes canoniquement associées aux lignes de $\mathcal{U}_p(0)$. L'espace vectoriel E" engendré par $\Theta^p((e))$ répond à la question, en effet, $\Theta^p((e))$ est une base adaptée de E" et comme :

$$\Theta^p((e)) = \mathcal{U}_p(M) Q^A Q^{\beta} ,$$

l'espace vectoriel E" est faiblement singulier à l'origine et a même ensemble d'exposants que E.

Le corollaire 2 est une conséquence immédiate du corollaire 1 et du théorème 1 du § 4 (page 25).

6. ETUDE DE CERTAINS SYSTÈMES DE PFAFF COMPLETEMENT INTEGRABLES.

On se propose, dans ce paragraphe, d'étudier les systèmes de Pfaff complètement intégrables de la forme :

$$(s) \qquad df = \omega f$$

avec
$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{(x_1)^{k_1^j} (x_2)^{k_2^j} \ldots (x_n)^{k_n^j}} \, dx_j \qquad (m \geq n)$$

où pour tout $j=1,2,\ldots, m$, $P_j \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$ et où les nombres k_i^j sont entiers positifs ou nuls.

1. Nous avons :

Proposition 1.

L'ensemble des solutions de (s) forment un sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathfrak{R})$ invariant par les opérations de $\pi_1(\mathfrak{D})$.

Par le changement de variables :

$$x_j = \exp. t_j \quad \text{si} \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_j = t_j \quad \text{si} \quad j = n+1, n+2, \ldots, m ;$$

le système (s) se transforme en le système complètement intégrable (s') $df' = \omega' f'$ avec

$$\omega' = \sum_{j=1}^{m} P_j'(t_1, t_2, \ldots, t_m)\, dt_j \text{ où, } P_j'(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathcal{H}^{p\times p}(\mathfrak{D}')$$

et où $\mathfrak{D}'$ désigne le produit $\Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_m$ avec,
si $j = 1,2,\ldots,n$,

$$\Delta_j = \{t_j = u_j + iv_j \in \mathbb{C} \mid u_j < \log.r\} \quad (r \text{ rayon de } D)$$

et

$$\Delta_j = D \quad \text{si} \quad j = n+1, n+2, \ldots, m .$$

Démonstration de la proposition 1.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre des variables. Désignons par :

- $\widetilde{\Delta}_k$ le produit $\Delta_{k+1} \times \Delta_{k+2} \cdots \times \Delta_m$,
- M_k le point $(t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_m)$ de $\widetilde{\Delta}_k$

et considérons le système linéaire

$$(s_1') \quad \frac{dY}{dt_1} = P_1'(t_1, M_1)\, Y \ .$$

Nous savons que :

1°) Si a est un vecteur de $\mathbb{C}^p$, il existe une solution et une seule $Y(t_1, M_1, a)$ du système (s_1') qui pour $t_1 = t_1^o$ prend la valeur a , et cette solution est holomorphe en a.

2°) La solution déterminée au 1°) est pour M_1 fixé, holomorphe sur Δ_1 .

3°) La solution déterminée au 1°) est holomorphe en M_1 sur $\widetilde{\Delta}_1$.

Il en résulte que si $e(M_1)$ est un vecteur holomorphe sur $\widetilde{\Delta}_1$, il existe une solution $Y(t_1, M_1, e(M_1))$ de (s_1') et une seule, prenant la valeur $e(M_1)$ pour $t_1 = t_1^o$ et de plus cette solution est holomorphe sur Δ_1 en la variable t_1 et sur $\widetilde{\Delta}_1$ en la variable M_1 , elle est donc holomorphe sur $\mathcal{D}' = \Delta_1 \times \widetilde{\Delta}_1$.

Soit maintenant $e(M_1) = (e_j(M_1))_{1 \le j \le p}$, un système de p vecteurs holomorphes sur $\widetilde{\Delta}_1$ et linéairement indépendants, (un tel système existe) ; désignons par :

1°) $Y_j(t_1, M_1)\ (1 \le j \le p)$ la solution de (s_1') holomorphe sur Δ_1 prenant la valeur $e_j(M_1)$ pour $t_1 = t_1^o$;

2°) $E(t_1, M_1)$ le système de vecteurs $(Y_j(t_1, M_1))_{1 \le j \le p}$, et $T_1(t_1, M_1)$ la matrice associée à ce système de vecteurs , $T_1(t_1, M_1) \in \mathcal{H}_b^{p \times p}(\mathcal{D}')$.

Alors T_1 est une matrice fondamentale de solutions du système (s'_1), ce qui entraine que les solutions de (s'_1) forment un sous espace vectoriel de dimension p de $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$.

Supposons maintenant que le système :

$$(s'_q) : \frac{\partial Y}{\partial t_k} = P'_k Y \qquad k = 1, 2, \ldots, q ,$$

admette une matrice fondamentale de solutions $T_q(t_1, t_2, \ldots, t_q, M_q)$ appartenant à $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$, montrons que le système (s'_{q+1}) admet également une matrice fondamentale de solutions $T_{q+1}(t_1, t_2, \ldots, t_{q+1}, M_{q+1})$ appartenant à $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$. La démonstration qui va suivre n'est rien d'autre que celle du théorème de Frobénius dans le cas linéaire. Toute solution de (s'_q) est de la forme $T_q(t_1, \ldots, t_q, M_q) \cdot C(M_q)$, pour avoir les solutions de (s'_{q+1}), il suffit d'écrire que cette matrice vérifie le système

$$\frac{\partial Y}{\partial t_{q+1}} = P'_{q+1} Y .$$

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial C(M_q)}{\partial t_{q+1}} = (T_q)^{-1} \left(-\frac{\partial T_q}{\partial t_{q+1}} + P'_{q+1} T_q\right) C(M_q) .$$

La condition de complète intégrabilité du système (s') $(d\omega' = \omega' \wedge \omega')$, entraine comme on le voit facilement que

$$K = (T_q)^{-1} \left(-\frac{\partial T_q}{\partial t_{q+1}} + P'_{q+1} T_q\right) ,$$

est une matrice $K(t_{q+1}, M_{q+1})$ appartenant à $\mathcal{H}^{p\times p}(\Delta_{q+1} \times, \ldots, \Delta_m)$. La matrice $C(M_q)$ est solution du système :

$$\frac{\partial Z}{\partial t_{q+1}} = K Z$$

et ce système admet une matrice fondamentale de solutions $R_{q+1} \in \mathcal{H}^{p\times p}(\Delta_{q+1} \times \ldots \Delta_m)$. Il en résulte que $T_{q+1} = T_q \cdot R_{q+1}$ est une matrice fondamentale de solutions

de (s'_{q+1}) appartenant à $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$.

Vu les hypothèses de récurrence et le changement de variables que nous avons fait, la première partie de la proposition 1 est démontrée. La deuxième partie de la proposition est évidente.

Proposition 2.

Pour toute matrice fondamentale Φ de solutions de (s), nous avons :

$$\Phi(Q) = H(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{S_j}$$

où pour tout $j=1,2,\ldots,n$, $S_j \in \mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ et $H \in \mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D})$.

Démonstration.

Soit Φ une matrice fondamentale de solutions de (s), pour tout $j=1,2,\ldots,n$, nous avons :

$$g_j^* \Phi = \Phi D_j \quad \text{où} \quad D_j \in Gl(p,\mathbb{C})$$

Posons : $C_j = \frac{1}{2\pi i} \log. D_j$, les endomorphismes g_j^* $(j=1,2,\ldots,n)$ étant deux à deux permutables, il en est de même des matrices D_j, par suite il existe une matrice inversible S telle que pour tout $j = 1,2,\ldots,n$

$$D_j = S^{-1} \begin{pmatrix} D_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_j^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & D_j^r \end{pmatrix} S$$

Les matrices D_j^k étant triangulaires à valeur propre unique (cf.§ 1). Nous avons évidemment pour tout k et tout couple (j,l)

$$D_j^k \; D_l^k = D_l^k \; D_j^k \quad ,$$

ce qui entraine par un calcul immédiat que

$$C_j \; C_l = C_l \; C_j \quad \text{pour tout couple } (j,l) .$$

La matrice :

$$H(Q) = \Phi(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-C_j}$$

est donc holomorphe sur $\mathcal{D}$.

Définition 1.

Nous dirons que l'origine est un point singulier régulier pour (s) , si pour une matrice fondamentale Φ , la matrice H est méromorphe sur D^m .

Remarque 1.

Cette notion est indépendante du choix de la matrice fondamentale.

Proposition 3.

Si l'origine est un point singulier régulier de (s) alors E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

La matrice H étant méromorphes dans D^m , il existe des entiers positifs $q_1 , q_2 , \ldots , q_n$ telle que

$$H(x_1,x_2,\ldots,x_m) \prod_{j=1}^{n} x_j^{q_j}$$

soit holomorphe dans D^m . La matrice $\Phi(Q)$ s'écrit alors

$$\Phi(Q) = H'(x_1,x_2,\ldots,x_m) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{C_j - q_j I}$$

où $H' \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$.

Pour obtenir le résultat annoncé, il reste à vérifier qu'il existe un élément $(\lambda_1,\lambda_2 , \ldots , \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{\substack{Q\to Q_o \\ Q\in U^o}} \frac{\Phi(Q)}{\prod_{j=1}^{n} Q^{\lambda_j}} = 0 \quad ,$$

pour tout ouvert distingué U de $\mathcal{R}$.

Et pour cela, il suffit de montrer que pour toute matrice constante B, il existe un nombre réel λ tel que :

$$\lim_{\substack{Q \to Q_0 \\ Q \in U}} \frac{Q^B}{Q^\lambda} = 0 \quad \text{pour tout ouvert ditingué } U .$$

Ce résultat restant vrai pour toute matrice semblable à B (avec la même valeur de λ) ; il suffit de le montrer dans les cas où B est diagonale ou nilpotente sans forme triangulaire. Or, dans ces deux cas le résultat est évident.

2. Définition 2.

Nous dirons que l'origine est un point singulier de première espèce pour (s), si pour tout $i = 1;2,\ldots,n$ et tout $j = 1,2,\ldots,m$ on a :

$$0 \leq k_i^j \leq 1 .$$

Proposition 4.

Si l'origine est un point singulier de première espèce pour (s) alors c'est un point singulier régulier.

Nous avons :

$$\Phi(Q) = H(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{C_j} ,$$

d'après théorème 2.1 page 111 de (2), il résulte que si on fixe n-1 des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m$; la matrice $H(Q)$ considérée comme fonction de la variable restante a au plus une gularité polaire à l'origine. La fonction $H(Q)$ est dans $\mathcal{D}$ développable en série de Laurent à coefficients matriciels :

$$H(Q) = H(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{j_1 \geq 0} \sum_{j_2 \geq 0, \ldots, j_n \geq 0} \frac{a_{j_1, j_2, \ldots, j_n}}{x^{j_1} x^{j_2} \ldots x_n^{j_n}} + h(x_1, x_2 \ldots x_m)$$

où $h(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{H}^{p \times p}(D^m)$.

Ecrivons

$$H(x_1, x_2, \ldots x_m) = \sum_{j_1 \geq 0} \frac{h_{j_1}(x_2, x_3, \ldots, x_n)}{x^{j_1}} + h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

où pour tout j_1 , $h_{j_1} \in \mathcal{H}^{pxp}(\hat{D})^{n-1}$.

Alors d'après le théorème rappelé ci-dessus, pour tout $M_1 \in (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n}$, il existe un entier $q(M_1)$ tel qur pour tout $q \geq q(M_1)$, $h_q(M_1) = 0$. Supposons qu'une infinité de fonctions $(h_{j_1})_{j_1 \in I}$ ne soient pas identiquement nulles et posons pour tout $j \in I$

$$V_j = \{M_1 \in (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n} \mid h_j(M_1) = 0 \}$$

et

$$W = \bigcup_{j \in I} V_j \quad , \quad W \subset (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n} \quad .$$

L'ensemble I étant infini, pour tout point $M_1 \in (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n}$, il existe $j_1 \in I$ tel que $j_1 \geq q(M_1)$ c'est à dire que $M_1 \in V_{j_1}$ et par suite

$$W = (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n} \quad .$$

L'ensemble W admet donc un point intérieur, comme il est réunion de la famille dénombrable de fermés $(V_j)_{j \in I}$, d'après le théorème de Baire un au moins de ces fermés, par exemple V_{j_o} admet un point intérieur. Ce qui entraine que $h_{j_o} = 0$ sur $(D)^{n-1} \times D^{m-n}$ car h_{j_o} est holomorphe sur $(D)^{n-1} \times D^{m-n}$, et ceci contredit la définition de l'ensemble $(h_{j_1})_{j_1 \in I}$. Il y a donc qu'un nombre fini de fonctions h_{j_1} qui ne sont pas identiquement nulles. Ce résultat étant vrai quelque soit la variable choisie parmi les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ (nous avons pris x_1) , il résulte que H est méromorphe sur D^m .

3. Définition 3.

Nous dirons que l'origine est un point singulier du type de Fuchs pour le système (s) si :

$$k_i^j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$k_i^i = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq j \leq m \ .$$

Proposition 5.

Si l'origine est un point singulier du type de Fuchs pour (s) alors l'espace vectoriel **E** de ses solutions est faiblement singulier à l'origine.

Démonstration.

La proposition 3, entraine que E est engendré par les colonnes d'une matrice

$$T_e(Q) = U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j}$$

où (e) est une base adaptée.

Il suffit donc de prouver que U(0) est inversible.

Nous avons pour tout $j = 1,2,\ldots,n$:

$$x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} Q^A Q^F + U(A_j Q^A Q^F + Q^A F_j Q^F) = P_j U Q^A Q^F$$

avec $$Q^A = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \quad , \quad Q^{-A} = \prod_{j=1}^{n} Q^{-A_j} \quad , \quad Q^F = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j} .$$

Donc

$$x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + U (A_j + Q^A F_j Q^{-A}) = P_j U$$

et en faisant tendre le point Q vers le point Q_o , il vient

$$U(0) (\widetilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i} \log. D_j^o) = P_j (0) U(0) .$$

Cette formule entraine que le noyau de U(0) est invariant par les endomorphismes $\widetilde{L}_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ associés aux matrices

$$\widetilde{L}_j = \widetilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i} \log. D_j^o$$

Donc d'après le théorème 2 du § 3 (page 20), l'espace vectoriel E est faiblement singulier à l'origine.

3. Soit $\mathcal{F}^{pxp}(\mathcal{D})$, le sous ensemble de $\mathcal{J}^{pxp}(\mathcal{D})$ des systèmes de Pfaff pour lesquels l'origine est un point singulier du type de Fuchs.

Définition 4.

Deux systèmes de Pfaff

$$(s_1)\quad df = \omega_1 f$$

$$(s_2)\quad dg = \omega_2 f$$

appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(\mathcal{D})$ seront dits équivalents sur $\mathcal{D}$, s'il existe une application holomorphe U de D^m dans $Gl(p,\mathbb{C})$ telle que la transformation $f = Ug$ transforme le système (s_1) en le système (s_2).

La relation d'équivalence ainsi définie s'étend aux germes de systèmes de Pfaff appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(\mathcal{D})$.

Proposition 6.

Dans chaque classe d'équivalence de germes de systèmes de Pfaff défini par un élément de $\mathcal{F}^{p\times p}(\mathcal{D})$, il y a un germe défini par un système de la forme :

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{x_j}\, dx_j$$

où les P_j $(j=1,2,\ldots,n)$ sont des polynômes.

Démonstration.

Si (e) est une base adaptée de l'espace vectoriel des solutions du système considéré, nous avons :

$$T_e(\Omega) = U(M)\, \omega^A e^B .$$

Il existe un disque $D' \subset D$, tel que $U(M)$ soit inversible dans D'^m ; la transformation $f = U(M)\, g$ nous donne le résultat annoncé.

Cette proposition est une autre forme du théorème de Floquet [9], et présente un grand intérêt dans l'étude de la classification des germes de système de Pfaff appartenant à $\mathcal{F}^{p\times p}(\mathcal{D})$.

DEUXIEME PARTIE : THEORIE GLOBALE

CHAPITRE II

Dans cette partie, nous nous donnons une variété analytique complexe V de dimension finie m et un sous-ensemble analytique A de V, de codimension un en chacun de ses points dont les composantes irréductibles ainsi que l'ensemble $S(A)$ de ses singularités sont sans singularité. La variété $V - A$ est notée $\hat{V}$.

§ 1. DEFINITION DE L'ENSEMBLE $\Omega^{p\times p}(V, A)$. RESIDU D'UN ELEMENT DE $\Omega^{p\times p}(V, A)$.

a) L'ensemble analytique A est sans singularité. Notons $\Omega^{p\times p}(V, A)$ l'ensemble des formes différentielles ω de degré un appartenant à $\Omega^{p\times p}(V - A)$ et telles que : pour tout point $M \in A$, il existe un quadruplet (U, F_U, P_U, Π_U) vérifiant les conditions I suivantes :

(I)

1°) U est un voisinage ouvert de M dans V tel que $A \cap U$ soit irréductible dans U.

2°) F_U est une fonction holomorphe sur U telle que

$$A \cap U = \{ P \in U \mid F_U(P) = 0 \}$$

et $(dF_U)(P) \not\equiv 0$ pour tout $P \in A \cap U$.

3°) $P_U \in \mathcal{M}^{p\times p}(U)$, $\Pi_U \in \Omega^{p\times p}(U)$ et vérifient :

$$\omega \mid U - A \cap U = P_U \frac{dF_U}{F_U} + \Pi_U$$

Exemple.

La variété V est une surface de Riemann et alors $A = \bigcup_{i\in I} \{p_i\}$ où les p_i sont des points isolés. On réalisera les conditions I en choisissant un ouvert U_i de V telle que $U_i \cap A = \{p_i\}$ et en prenant pour fonction F_{U_i} une coordonnée locale z de V dans U_i s'annulant au point p_i.

Proposition 1.

Pour tout $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$, il existe une matrice R^{ω} définie et holomorphe sur A ne dépendant que de ω telle que :

$$R^{\omega} \mid A \cap U = \Gamma_U \mid A \cap U$$

quels que soient U, F_U, Γ_U et Γ_U satisfaisant aux conditions I de la définition de $\Omega^{pxp}(V, A)$.

Démonstration.

Considérons deux quadruplets $(U, F_U, \Gamma_U, \Pi_U)$ et $(U', F'_{U'}, \Gamma_{U'}, \Pi_{U'})$ satisfaisant aux conditions I . Sur $U \cap U' \cap \complement A$ (supposé non vide) nous avons :

$$P \frac{d\Gamma_U}{\Gamma_U} + \Gamma_U = F_{U'} \frac{dF_{U'}}{F_{U'}} + \Pi_{U'} .$$

Soit Q un point de $U \cap U' \cap A$; comme F_U et $F_{U'}$ sont des générateurs de l'idéal de A au point Q (ce sont des éléments irréductibles de l'anneau local), il existe un voisinage $v(Q) \subset U \cap U'$ du point Q tel que sur ce voisinage l'on ait

$$F_{U'} = K F_U$$

où K est une fonction holomorphe inversible sur $v(Q)$. Nous avons sur $v(Q) \cap \complement A$

$$P_U \frac{dF_U}{F_U} + \Gamma_U = P_{U'} \frac{dK}{K} + F_{U'} \frac{d'U}{F_U} + \Pi_{U'} ,$$

c'est à dire :

$$(\Gamma_U - P_{U'}) dF_U = F_U (\Pi_{U'} - \Pi_U + P_{U'} \frac{dK}{K})$$

et comme $(dF)(Q) \neq 0$, nous avons :

$$P_U(Q) = \Gamma_{U'}(Q) .$$

Ce qui prouve la proposition 1 .

Définition 1.

La fonction R^{ω} sera notée $\text{rés}_V \omega$ et appelée le résidu de ω .

Proposition 2.

Si le résidu d'un élément ω de $\Omega^{pxp}(V, A)$ est nul, alors ω est

restriction à $V-A$ d'un élément de $\Omega^{p\times p}(V)$.

Démonstration.

Soit ω un élément de $\Omega^{p\times p}(V,A)$ vérifiant $\text{rés}_V\ \omega = 0$. Il suffit de prouver qu'il se prolonge localement au voisinage de tout point M de A en une forme différentielle holomorphe.

Par hypothèse :

$$\text{rés}_V\ \omega \mid A\cap U = P_U \mid A\cap U = 0 \ ,$$

donc il existe un voisinage v de M dans U tel que :

$$P_U = K\,F_U \qquad \text{sur } v \ ,$$

où K est une matrice holomorphe dans v . Nous avons donc :

$$\omega \mid v\cap \complement A = K\,dF_U + \Pi_U \ .$$

Le second membre est holomorphe sur v , c.q.f.d.

b) L'ensemble analytique A admet des singularités. Désignons par S l'ensemble des points singuliers de A . Soit (A^*,μ) le normalisé de A et posons $S^* = \mu^{-1}(S)$. Nous noterons cette fois $\Omega^{p\times p}(V,A)$ le sous ensemble de $\Omega^{p\times p}(V-S,A-S)$ des 1-formes différentielles matricielles ω pour lesquelles il existe une fonction matricielle R^ω définie et holomorphe sur A^* telle que :

$$R^\omega = (\text{rés}_{V-S}\ \omega)\circ\mu \qquad \text{sur } A^*-S^* \ .$$

Cette fonction R^ω sera encore appelée le résidu de ω et notée $\text{rés}_V\ \omega$.

Proposition 3.

Soit ω un élément de $\Omega^{p\times p}(V-S,A-S)$. Si $\text{rés}_{V-S}\ \omega = 0$ alors ω est la restriction à $V-S$ d'un élément de $\Omega^{p\times p}(V)$.

Démonstration.

La condition $\text{rés}_{V-S}\omega = 0$ entraine que ω est la restriction à

$V - S - (A - S)$ d'une forme différentielle ω' holomorphe sur $V - S$. Comme la codimension de S est supérieure ou égale à 2 , ω' est elle-même la restriction à $V - S$ d'une forme différentielle holomorphe sur V , ce qui prouve la proposition 3.

Corollaire 1.

Si $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$ *et* $\text{rés}_V\, \omega = 0$, *alors* ω *est la restriction à* $V - A$ *d'une forme différentielle holomorphe sur* V .

Définition 2.

Si M *est un point de l'ensemble analytique* A , *nous appellerons voisinage privilégié de* M *par rapport à* A , *tout voisinage* U *de* M *dans* V *tel que toutes les composantes irréductibles de* $A \cap U$ *contiennent* M .

Pour toute forme différentielle de degré un ω appartenant à $\Omega^{p\times p}(V - A)$, nous désignerons par (P) la propriété suivante :
"Pour tout $M \in A$, il existe un voisinage privilégié $U(M)$ de M dans V tel que si $(A_i)_{1 \le i \le q_M}$ désignent les composantes irréductibles de $A \cap U$ l'on ait :

$$(1) \qquad \omega = \sum_{i=1}^{q_M} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \pi_U \quad \text{sur} \quad U \cap \complement A \ ,$$

où

a) $P_i \in \mathcal{O}^{p\times p}(U)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, q_M$,

b) $\pi_U \in \Omega^{p\times p}(U)$,

c) $F_i \mid A_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, q_M$ " .

Proposition 4.

Si $\omega \in \Omega^{p\times p}(V - A)$ *possède la propriété* (P) *alors* $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$.

Nous avons évidemment $\omega \in \Omega^{p\times p}(V - S, A - S)$ et alors $\text{rés}_{V-S}\, \omega$ est bien défini et holomorphe sur $A - S$. La fonction $R'^{\omega} = (\text{rés}_{V-S})\omega \circ \mu$ est holomorphe sur $A^* - S^*$. Il suffit donc de montrer que R'^{ω} se prolonge en une fonction holomorphe sur A^* . Soit M^* un point de S^* et $M = \mu(M^*)$, désignons par $(A_i)_{1 \le i \le q_M}$ les composantes irréductibles de A passant par M , dans un voisinage privilégié $U(M)$ de M nous avons :

$$\omega \mid U(M) - A \cap U(M) = \sum_{i=1}^{q_M} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \pi_U \ .$$

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, q_M$,

$$R_i'^{\omega} = R'^{\omega} \mid \mu^{-1}(A_i \cap U - S \cap U \cap A_i)$$

$$= P_i \circ \mu \mid A_i \cap U - S \cap U \cap A_i \ .$$

Comme P_i est holomorphe sur U , il résulte que $R_i'^{\omega}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur

$$\overline{\mu^{-1}(A_i \cap U - S \cap A_i \cap U)} \ .$$

Ce qui entraine que R'^{ω} est la restriction à $A^* - S^*$ d'une fonction $R^{*\omega}$ holomorphe sur A^* .

2. EXEMPLES.

Dans ce paragraphe, A sera réunion d'un nombre fini q de composantes irréductibles A_i sans singularité.

a) Supposons que V est une variété de Stein et que chaque A_i est défini par l'annulation d'une seule fonction F_i holomorphe dans V vérifiant $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout M appartenant à A_i .

Proposition 5.

Tout élément ω de $\Omega^{p\times p}(V, A)$ vérifie dans $V - A$

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \Theta$$

où $$P_i \in \mathcal{O}^{p\times p}(V) \quad \text{et} \quad \Theta \in \Omega^{p\times p}(V) \ .$$

Démonstration.

La fonction holomorphe $R^{\omega} = \text{rés}_V \omega$ est la donnée de q fonctions R_i^{ω} $(i = 1,2, \ldots, q)$ holomorphes respectivement sur A_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$. Comme V est une variété de Stein, il existe pour tout i une fonction P_i holomorphe sur V telle que :

$$P_i \mid A_i = R_i^{\omega} \ .$$

Montrons que la forme différentielle

$$\Theta = \omega - \sum_{i=1}^{q} P_i \frac{dF_i}{F_i}$$

qui appartient à $\Omega^{pxp}(V, A)$ se prolonge en une forme différentielle holomorphe sur V. Soit M un point quelconque de $A - S$, ce point appartient à une composante irréductible A_i de A et à une seule. Il existe un voisinage $U(M)$ de M dans V et des matrices $Q_i \in \Omega^{pxp}(U)$, $\pi_i \in \Omega^{pxp}(U)$ telles que :

$$\omega \mid U - A \cap U = Q_i \frac{dF_i}{F_i} + \pi_i .$$

Comme $(dF_i)(N) \neq 0$ pour tout $N \in A_i$ nous avons :

$$(Q_i - P_i) \mid U \cap A_i = 0$$

et donc

$$Q_i - P_i = K F_i$$

où K est une matrice carrée d'ordre p dont tous les éléments sont holomorphes inversibles. Ce résultat entraine que pour tout $i = 1, 2, \ldots, q$

$$\text{rés}_{V-S}\, \Theta \mid A_i - S = 0$$

et donc $\text{rés}_{V-S}\, \Theta = 0$, ce qui signifie que Θ est la restriction à $V - A$ d'une forme différentielle holomorphe sur V et comme sur $V - A$ nous avons

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \Theta$$

la proposition 4 est démontrée.

Remarque 1.

Cette proposition nous permet de donner une réciproque à la proposition 4 du § 1. En effet, il suffit de choisir le voisinage suffisamment petit et de plus de Stein, ce qui est toujours possible.

b) Supposons que V est l'espace projectif complexe, quotient de

$\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ par l'application π qui identifie les points situés sur une même droite complexe issue de l'origine de $\mathbb{C}^{m+1}$. Soit F_i une équation polynômiale irréductible de $\pi^{-1}(A_i)$ et soit $\hat{\pi}$ la restriction de π à $\mathbb{C}^{m+1} - (\pi^{-1}(A) \cup \{0\})$.

Proposition 6.

Pour tout $\omega \in \Omega^{pxp}(V, A)$ on a :

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} \mathcal{A}_i \frac{dF_i}{F_i}$$

où les matrices $\mathcal{A}_i$ sont des $p \times p$ - matrices constantes liées par la relation

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\ \mathcal{A}_i = 0$$

Démonstration.

Désignons par $x_o, x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ et par $\mathcal{U} = \{U_j\}_{o \le j \le m}$ le recouvrement canonique de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ par les ouverts de coordonnées définis respectivement par $x_j \neq 0$ et posons

$$y_j^k = \frac{x_k}{x_j} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m \ ; \ k = 0, 1, \ldots, m \text{ et } k \neq j .$$

Pour tout i, F_i est un polynôme mais au voisinage de tout point de A_i ce polynôme est équivalent à un polynôme distingué du premier degré ce qui entraine que $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout M appartenant à A_i. Sur l'ouvert de Stein U_j nous avons :

$$\omega \mid U_j - A \cap U_j = \sum_{i=1}^{q} P_j^i \frac{df_i}{f_i} + \overline{\omega}_j$$

où

$$P_j^i \in \mathcal{H}^{pxp}(U_j) \ , \ \overline{\omega}_j \in \Omega^{pxp}(U_j) \ ,$$

et où les fonctions f_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ sont définies par :

$$F_i(x_o, x_1, \ldots, x_m) = (x_j)^{p_i} f_i(y_j^o, y_j^1, \ldots, y_j^m) .$$

La fonction $\text{rés}_V \omega$ est constituée de q fonctions $\mathcal{A}_i$ respectivement

holomorphe sur A_i ; comme A_i est compact, la fonction $\mathscr{A}_i$ est constante. Considérons la forme différentielle

$$\hat{\iota} = \sum_{i=1}^{q} \mathscr{A}_i \frac{dF_i}{F_i} ,$$

et montrons qu'il existe une forme différentielle ι sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C}) - A$ telle que

$$\pi^* \iota = \hat{\iota} .$$

Pour cela il suffit de prouver que

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\, \mathscr{A}_i = 0 .$$

Nous avons :

$$\hat{\pi}^* (\omega \mid U_j - U_j \cap A) = \sum_{i=1}^{q} P_j^i \frac{dF_i}{F_i} + \sum_{i=1}^{q} P_j^i \frac{d(x_j^{-P_i})}{x_j^{-P_i}} + \overline{\omega}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{q} P_j^i \frac{dF_i}{F_i} + \sum_{i=1}^{q} P_j^i (-P_i) \frac{dx_j}{x_j} + \overline{\omega}_j .$$

On peut supposer sans nuire à la généralité du raisonnement qui va suivre que pour un j donné la sous variété définie par $x_j = 0$ n'appartient pas à A Soit D une droite projective complexe quelconque de $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$. Le théorème des résidus appliqué à la forme différentielle

$$\omega \mid (U_j - U_j \cap A) \cap D$$

nous donne immédiatement

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\, P_j^i \mid A_i \cap D = 0 ,$$

c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\, \mathscr{A}_i = 0 .$$

En d'autres termes, il existe une forme différentielle ι définie et holomorphe sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C}) - A$ telle que

$$\hat{\pi}^* \iota = \hat{\iota} .$$

Mais alors vu la définition de τ la forme différentielle $\omega - \tau$ est holomorphe sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$, comme il n'y a pas d'autres formes différentielles holomorphes sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ que la forme différentielle nulle, la proposition 5 se trouve démontrée.

3. STABILITE DE $\Omega^{pxp}(V, A)$ PAR MODIFICATION DE HOPF.

Soit Σ un sous ensemble analytique de V, sans singularité et de codimension supérieure ou égale à 2. On peut supposer sans nuire à la généralité que Σ est irréductible. Désignons par V' la variété obtenue à partir de V en faisant un éclatement de Hopf [10] σ le long de Σ, par A' le sous ensemble analytique $\sigma^{-1}(A)$ de V' et par $\Sigma' = \sigma^{-1}(\Sigma)$.

Théorème 1.

L'application σ^* est un isomorphisme de $\Omega^{pxp}(V, A)$ sur $\Omega^{pxp}(V', A')$

Ce théorème va être une conséquence des lemmes suivants.

Lemme 1.

L'application σ^* est un isomorphismes de $\Omega^{pxp}(V)$ sur $\Omega^{pxp}(V')$.

Démonstration.

L'application σ étant analytique, il est évident que si $\omega \in \Omega^{pxp}(V)$ on a $\sigma^* \omega \in \Omega^{pxp}(V')$. Inversement soit ω' un élément de $\Omega^{pxp}(V')$, comme σ est un isomorphisme analytique de $V' - \Sigma'$ sur $V - \Sigma$, il existe une forme différentielle $\hat{\omega} \in \Omega^{pxp}(V - \Sigma)$ telle que :

$$\omega' \mid V' - \Sigma' = \sigma^* \hat{\omega}.$$

D'autre part l'ensemble analytique Σ étant de codimension supérieure ou égale à 2, il existe une forme différentielle ω appartenant à $\Omega^{pxp}(V)$ telle que :

$$\omega \mid V - \Sigma = \hat{\omega}$$

mais alors l'égalité

$$\sigma^* \omega \mid V' - \Sigma' = \omega' \mid V' - \Sigma'$$

et de plus $\omega' \in \Omega^{p,p}(V')$ et $\sigma^* \omega \in \Omega^{p,p}(V')$ entrainent que

$$\sigma^* \omega = \omega' \quad \text{sur} \quad V' .$$

Ce qui démontre le lemme 1.

Lemme 2.

Si $\omega \in \Omega^{p,p}(V,A)$ alors $\sigma^* \omega \in \Omega^{p,p}(V',A')$.

Soit ω un élément de $\Omega^{p,p}(V,A)$, nous avons $\sigma^* \omega \in \Omega^{p,p}(V'-A')$ et même $\sigma^* \omega \in \Omega^{p,p}(V'-\Sigma' \cap A', A'-\Sigma' \cap A')$. Le fait d'appartenir à $\Omega^{p,p}(V',A')$ étant une propriété locale, il suffit pour faire la démonstration de se placer au voisinage d'un point P' de $\Sigma' \cap A'$. Notons P la projection de P' sur V et utilisons la définition locale de l'éclatement σ .

Il existe un voisinage $U(P)$ de P dans V et des fonctions coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ telles que :

a) $U(P)$ soit un ouvert de Stein privilégié pour A .

b) $U \cap \Sigma = \{ x \in U \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0 \}$ où k est la codimension de Σ .

De plus $U(P)$ peut être choisi de manière à décrire localement σ , c'est à dire tel qu'il existe un isomorphisme analytique ρ de $\sigma^{-1}(U)$ sur le sous ensemble analytique sans singularité U^* de $U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$ défini par

$$U^* = \{ (x, t_1, t_2, \ldots, t_k) \in U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C}) \mid x_u t_v = x_v t_u \text{ pour tout } u, v = 1,2,\ldots,k \}$$

vérifiant

$$\pi \circ \rho = \sigma ,$$

où

a) $t_1, t_2, \ldots, t_k$ forment un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$,

b) π est la projection canonique de $U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$ sur U .

La variété U^* peut-être recouverte par les ouverts de coordonnées suivants U_j^* $(j = 1, 2, \ldots, k)$ défini par $t_j \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\frac{t_1}{t_j}, \frac{t_2}{t_j}, \ldots, \frac{t_{j-1}}{t_j}, x_j, \frac{t_{j+1}}{t_j}, \ldots, \frac{t_k}{t_j}, x_{k+1}, \ldots, x_m .$$

Posons :

$$\xi_j^l = x_l \quad \text{si} \quad l > k \quad \text{ou si} \quad l = j$$

$$\xi_j^l = \frac{t_l}{t_j} \quad \text{si} \quad l \leq k \quad \text{et} \quad l \neq j \ .$$

Alors

$$x_l = \xi_j^l \quad \text{si} \quad l > k \quad \text{ou} \quad l = j$$

$$x_l = \xi_j^l \ \xi_j^j \quad \text{si} \quad l \leq k \quad \text{et} \quad l \neq j \ .$$

Notons A_i $(i = 1,2,\ldots,r)$ les composantes irréductibles de $A \cap U$, elles passent toutes par P car U est privilégié pour A. En restreignant éventuellement l'ouvert U, nous avons sur $U \cap \complement A$, la formule (1) (p. II.1.48.)

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \overline{\omega} \ .$$

Dans la suite nous éviterons d'écrire l'application ρ intervenant dans la définition locale de l'éclatement σ.

Si I désigne le sous-ensemble de $\{1, 2,\ldots,r\}$ des indices i tels que $A_i \cap U \supset \Sigma \cap U$; nous avons pour tout $i \in I$

$$(F_i \circ \sigma) \mid U_j^* = (\xi_j^j)^{p_i^j} G_i^j (\xi_j^1, \xi_j^2, \ldots, \xi_j^m) \ ,$$

et la condition $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout $M \in U \cap A_i$ entraine, $p_i^j = 1$ et $G_i^j (\xi_j^1, \ldots, \xi_j^{j-1}, 0, \xi_j^{j+1}, \ldots, \xi_j^m) \neq 0$.

Mais alors nous avons sur $U_j^* - A' \cap U_j^*$

$$\sigma^* \omega = \sum_{i \in I} {}^*P_i \frac{d \xi_j^j}{\xi_j^j} + \sum_{i \in I} {}^*P_i \frac{d G_i^j}{G_i^j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I}}^{r} {}^*P_i \frac{dF_i}{F_i} + \sigma^* \overline{\omega}$$

où pour tout i, ${}^*P_i = P_i (\xi_j^1 \ \xi_j^j, \xi_j^2 \ \xi_j^j, \ldots,) = P_i \circ \sigma \mid U_j^*$)

Cette formule nous montre que la forme différentielle

$$\sigma^* \omega \mid U_j^* - A' \cap U_j^*$$

appartient à $\Omega^{PXP}(U_j^*, A' \cap U_j^*)$. Ce résultat étant valable pour tout j nous avons par là démontré que $\sigma^* \omega \in \Omega^{PXP}(V', A')$ (cf. prop. 4 § 1) .

Démonstration du théorème 1.

Vu les lemmes ci-dessus, il reste à prouver que σ^* est surjective car elle est évidemment injective. Soit ω' une forme différentielle appartenant à $\Omega^{PXP}(V', A')$, σ étant un isomorphisme analytique de $V' - \Sigma'$ sur $V - \Sigma$, il existe une forme $\widetilde{\omega} \in \Omega^{PXP}(V - \Sigma \cap A, A - \Sigma \cap A)$ telle que :

$$\iota^* \widetilde{\omega} \mid V' - \Sigma' = \omega' .$$

Notons $R'(\omega')$ le résidu de ω' sur V' , cette fonction est définie et holomorphe sur A' et

$$R'(\omega') \circ \sigma^{-1} \mid A - \Sigma \cap A = R(\widetilde{\omega}) = \text{rés}_{V - \Sigma \cap A} \widetilde{\omega} .$$

Désignons par $(A_i)_{i \in I}$ les composantes irréductibles de A et posons

$$\widetilde{R}_i = R(\widetilde{\omega}) \mid A_i - \Sigma \cap A_i .$$

Il est évident que si $\Sigma \cap A = \emptyset$ alors $\widetilde{\omega}$ appartient à $\Omega^{PXP}(V, A)$ et le théorème se trouve démontré. Le seul cas à étudier est donc le cas ou $\Sigma \cap A \neq \emptyset$. Pour les indices i telles que $\Sigma \cap A_i = \emptyset$, $\widetilde{R}_i$ est une fonction définie et holomorphe sur A_i . Par ailleurs si la codimension de $\Sigma \cap A_i$ est supérieure à 2 , il est clair que la fonction $\widetilde{R}_i$ se prolonge en une fonction R_i holomorphe sur A_i . On peut donc supposer que la codimension de Σ est égale à 2 et le seul cas restant à étudier est celui des composantes irréductibles A_i contenant Σ . Rappelons que nous avons supposer Σ irréductible. L'application σ est un isomorphisme analytique de $\sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i)$ sur $A_i - \Sigma \cap A_i$, nous avons donc

$$\widetilde{R}_i \circ \sigma \mid \sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i) = R' \mid \sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i)$$

où R' est holomorphe sur $\sigma^{-1}(A_i)$. Montrons que R_i est la restriction à $A_i - \Sigma \cap A_i$ d'une fonction R_i sur A_i holomorphe. Pour cela plaçons nous au voisinage d'un point $P \in \Sigma \cap A_i$. Soit $U(P)$ un voisinage coordonné de P privilégié pour A_i possédant les propriétés suivantes ; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignant les

fonctions coordonnées dans U :

a) $U \cap \Sigma = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U \mid x_1 = x_2 = 0 \}$,

$P = (0,0,\ldots,0) \in U$.

b) $A_i \cap U = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U \mid F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \}$

où F_i est une fonction holomorphe dans U vérifiant $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout $M \in U \cap A_i$.

c) L'ouvert U décrit localement l'éclatement σ , c'est à dire qu'il existe un **isomorphisme** analytique ρ de $\sigma^{-1}(U)$ sur la sous variété U^* de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ définie par :

$$U^* = \{(x, t_1, t_2) \in U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \mid x_1 t_2 = x_2 t_1\}$$

avec

$$\pi \circ \rho = \sigma$$

où

1°) t_1, t_2 sont des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$,

2°) π est la projection canonique de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur U .

Dans la suite nous n'écrirons pas explicitement l'isomorphisme ρ . La variété U^* est recouverte par les deux ouverts de coordonnées U_1^* défini par $t_1 \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\xi_1^1 = x_1 \ , \ \xi_2^1 = \frac{t_2}{t_1} \ , \ \xi_3^1 = x_3 \ , \ldots, \ \xi_m^1 = x_m \ ,$$

et U_2^* défini par $t_2 \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\xi_1^2 = \frac{t_1}{t_2} \ , \ \xi_2^2 = x_2 \ , \ \xi_3^2 = x_3 \ , \ldots, \ \xi_m^2 = x_m \ .$$

Nous avons

$$F_i \circ \sigma \mid U_1^* = \xi_1^1 \, G_i^1 (\xi_1^1 , \xi_2^1, \ldots, \xi_m^1)$$

avec

$$G_i^1 (0 , \xi_2^1 , \ldots, \xi_m^1) \neq 0$$

et

$$F_i \circ \sigma \mid U_2^* = \xi_2^2 \, G_i^2 (\xi_1^2 , \xi_2^2 , \ldots, \xi_m^2)$$

avec

$$G_i^2 (\xi_1^2 , 0, \xi_3^2 , \ldots, \xi_m^2) \neq 0 \ .$$

Désignons par A_i'' le sous ensemble analytique de U^* défini par

$$G_i^1 = 0 \quad \text{dans} \quad U_1^*$$

et

$$G_i^2 = 0 \quad \text{dans} \quad U_2^* \ .$$

Le fait que A_i soit sans singularité entraine que $\sigma \mid A_i''$ est un isomorphisme de $\overline{A_i''}$ sur $A_i \cap U$, mais comme $R' \mid \overline{A_i''}$ est holomorphe et comme

$$\widetilde{R}_i \mid A_i \cap U - \Sigma \cap A_i \cap U = R' \circ \sigma \mid A_i'' - \Sigma' \cap A_i'' \quad ,$$

la fonction $\widetilde{R}_i$ se prolonge en une fonction R_i holomorphe sur $A_i \cap U$. La famille $(R_i)_{i \in I}$ défini donc une fonction sur A holomorphe, il en résulte que la forme différentielle $\widetilde{\omega}$ appartient à $\Omega^{p \times p}(V,A)$ et par suite l'application σ^* est surjective ce qui prouve le théorème 1.

Du théorème 1 nous déduisons un autre résultat intéressant concernant les résidus. Soient J l'ensemble des éléments $i \in I$ tels que $A_i \supset \Sigma$, et A_i' l'adhérence de $\sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i)$ dans V'.

Proposition 1.

Si $J \neq \emptyset$, nous avons pour tout $\omega' \in \Omega^{p \times p}(V',A')$,

$$\text{rés}_{V'}\, \omega' \mid \Sigma' = \sum_{i \in J} \text{rés}_{V'}\, \omega' \mid A_i' \cap \Sigma' \quad .$$

En effet soit $\omega' \in \Omega^{p \times p}(V',A')$, il existe $\omega \in \Omega^{p \times p}(V,A)$ telle que

$$\sigma^* \omega = \omega' \ ,$$

et si U est un voisinage d'un point $P \in \Sigma$ choisi comme dans la démonstration du lemme 2 dont nous utilisons les notations, nous avons :

$$\omega \mid U - A \cap U = \sum_{i=1}^{r} P_i \frac{d F_i}{F_i} + \overline{\omega} \ ,$$

et pour $j = 1,2$

$$\sigma^* \omega \mid U_j^* - A' \cap U_j^* = \sum_{i \in J} {}^*P_i \frac{d \xi_j^j}{\xi_j^j} + \sum_{i \in J} {}^*P_i \frac{d G_i^j}{G_i^j} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \notin J}} {}^*P_i \frac{d F_i}{F_i} + \sigma^* \overline{\omega} \ ,$$

où ${}^*P_i = P_i \circ \sigma \mid U_j^*$.

Alors

$$\text{rés}_{V'}\ \omega' \,|\, \Sigma' \cap U^* = \sum_{i \in J} {}^*P_i \,|\, \Sigma' \quad ,$$

or A'_j est défini dans U_j par

$$G_i^j = 0 \ .$$

Il en résulte que

$$\text{rés}_{V'}\ \omega' \,|\, A'_i \cap \Sigma' \cap U_j^* = {}^*P_i \,|\, A'_i \cap \Sigma' \cap U_j^*$$

ce qui prouve la proposition 6.

CHAPITRE III

§ 1. SYSTEME DE PFAFF DU TYPE DE FUCHS.

a) Les composantes irréductibles $(A_i)_{i \in I}$ de A sont en position générale.

Soit M un point de A, il existe :

- un entier n strictement positif tel que $M \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$;
- un voisinage W de M dans V, un isomorphisme analytique Φ de D^m sur W, (D désignant le disque unité centré à l'origine du plan complexe $\mathbb{C}$), tel que :

$$\Phi^{-1}(M) = (0,0,\ldots,0) \in D^m ,$$

et

$$\Phi^{-1}(A_i \cap W) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in D^m \mid x_i = 0\} ,$$

pour tout $i = 1,2,\ldots,n$.

Un voisinage W de cette nature sera appelé voisinage de coordonnée pour A au point M. Posons $\hat{W} = W - W \cap A$. Pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset R(\hat{V})$, il existe une application Φ_c de $R(\mathcal{D})$ sur c réalisant $R(\mathcal{D})$ comme revêtement de c.

Définition 1.

Un élément $f \in \mathcal{H}^{p \times 1}(R(\hat{V}))$ est dit d'ordre fini au point M, si pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset R(\hat{V})$, la fonction $(f|c) \circ \Phi_c$ est d'ordre fini à l'origine de D^m.

Définition 2.

Un élément $f \in \mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit d'ordre fini sur A, si f est d'ordre fini en tout point de A.

Pour tout sous espace vectoriel E de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$, nous noterons, $E_c(\hat{W})$ l'espace vectoriel des restrictions des éléments de E à la composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$ et

$$E_c(\mathcal{L}) = \{f \circ \Phi_c \mid f \in E_c(\hat{W})\} .$$

Définition 3.

Un sous espace vectoriel E de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$, de dimension finie p est dit faiblement singulier au point $M \in A$, s'il existe un voisinage W de coordonnée pour A au point M, tel que : pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, l'espace vectoriel $E_c(\mathcal{L})$ soit faiblement singulier à l'origine de D^m.

Remarque 1.

Les définitions 1, 2 et 3 sont indépendantes du choix de W et de l'isomorphisme Φ.

Définition 4.

Un sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit faiblement singulier au point $M \in \hat{V}$, s'il existe un voisinage W de ce point dans $\hat{V}$ tel que pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(W) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, la restriction de E à c admette une base dont la matrice associée soit inversible au point $\psi^{-1}(M) \cap c$.

Définition 5.

Un sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit faiblement singulier sur V si :

1°) E est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$,

2°) E est faiblement singulier en tout point de V.

Définition 6.

Un système de Pfaff appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(V-A)$ est dit du type de Fuchs si l'espace vectoriel de ses solutions est faiblement singulier sur V

Remarque 2.

L'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(V-A)$ est évidemment un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{J}^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ stable par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$ et faiblement singulier en tout point de $\hat{V}$. La seule condition supplémentaire imposée à un tel système, pour qu'il soit de Fuchs est donc que son espace vectoriel de solutions soit faiblement singulier sur A.

b) Les composantes irréductibles de A ne sont plus en position générale.

Désignons par $S(A)$ le sous ensemble analytique de V constitué par les points en lesquels les composantes irréductibles $(A_i)_{i\in I}$ de A ne sont plus en position générale. Rappelons que les composantes irréductibles de A sont sans singularité.

Définition 7.

Nous appellerons modification élémentaire de (V,A) un éclatement de Hopf (V',σ,V) le long d'une composante irréductible de $S(A)$.

Définition 8.

Nous appellerons modification de Hopf de (V,A) une donnée $(V^k,A^k,\tau,V,A$ telle que :

$$\tau = \sigma_k \circ \sigma_{k-1} \circ \ldots \circ \sigma_1$$

où (V^j,σ_j,V^{j-1}) est une modification élémentaire de (V^{j-1},A^{j-1}). Soit $\mathcal{M}od.(V,A)$ l'ensemble des modifications de Hopf de (V,A) telles que les composantes irréductibles de $\tau^{-1}(A)$ soit en position générale.

Proposition 1.

L'ensemble $\mathcal{M}od.(V,A)$ n'est pas vide.

Soit Σ une composante irréductible de $S(A)$, et soient $(A_i)_{1\leq i\leq q}$ les composantes irréductibles de A qui ne sont pas en position générale le long de Σ . D'après les propriétés des éclatements de Hopf [10] , l'ordre d'intersection de deux composantes irréductibles diminue lorsqu'on fait un éclatement le long de Σ . Il en résulte qu'à l'aide d'un nombre fini d'éclatement de Hopf $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ nous obtenons une variété V' et une application $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r$ de V' sur V telle que les composantes irréductibles de

$$\tau^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right) \subset V'$$

soient en position générale le long de $\tau^{-1}(\Sigma)$. La proposition 1 résulte immédiatement de ces considérations.

D'une manière plus générale, désignons par Σ un sous ensemble analytique de V , supposons qu'il existe une variété V' et une application analytique τ de V' sur V telle que τ soit un isomorphisme analytique de $V'-\tau^{-1}(\Sigma)$ sur $V-\Sigma$ et telle que l'ensemble analytique $\tau^{-1}(A) = A'$ ait toutes ses composantes irréductibles de codimension 1 en tout point, sans singularité et en position générale. Par exemple Σ peut-être l'ensemble analytique des points en lesquels les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale, ou encore Σ peut contenir les points singuliers des composantes irréductibles de A en supposant bien entendu l'existence de tels points singuliers ; dans ces cas l'application τ pourrait être une composition d'éclatement de Hopf le long des composantes irréductibles de Σ .

Remarquons que τ définit un isomorphisme analytique de $\mathcal{R}(\hat{V})$ sur $\mathcal{R}(\hat{V'})$ $(\hat{V'} = V' - A')$ grâce auquel nous identifierons ces deux variétés.

Définition 9.

Un élément f appartenant à $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit d'ordre fini au point M de A pour la projection τ s'il est d'ordre fini en tout point de $\tau^{-1}(M)$.

Définition 10.

Un sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit faiblement singulier sur V pour la projection τ s'il est faiblement singulier sur V' .

Définition 11.

Un système de Pfaff appartenant à $\Omega^{pXp}(V-A)$ est dit du type de Fuchs pour la projection τ si l'espace vectoriel de ses solutions est faiblement singulier sur V'.

Remarque 3.

La notion de faiblement singulier pour un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\Omega^{pX1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ dépend à priori de la projection τ, nous verrons dans le paragrapne suivant que dans le cas où τ est une modification de Hopf, cette notion, donc également celle du système de Pfaff du type de Fuchs ne dépend pas de la projection τ.

§ 2. LE THEOREME DE FUCHS SUR UNE VARIETE ANALYTIQUE COMPLEXE.

Théorème 1.

Pour qu'un système de Pfaff $df = \omega f$ appartenant à $\Omega^{pXp}(V-A)$ soit de Fuchs, il faut et il suffit que $\omega \in \Omega^{pXp}(V, A)$.

Démonstration.

a) Les composantes irréductibles de A sont en position générale.

Soit $(s) : df = \omega f$ un système de Pfaff du type de Fuchs appartenant à $\Omega^{pXp}(V-A)$, l'espace vectoriel E de ses solutions est un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\Omega^{pX1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ faiblement singulier sur V.

Comme $\omega \in \Omega^{pXp}(V-A)$, pour montrer que $\omega \in \Omega^{pXp}(V, A)$, il suffit d'étudier ω au voisinage des points de A.

Soit M un point de A, supposons par exemple que $M \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont les composantes irréductibles de A passant par M. Désignons par $W(M)$ un voisinage de coordonnée de M pour A, nous savons qu'il existe un isomorphisme analytique Φ de D^m sur $W(M)$ tel que :

$$\Phi^{-1}(M) = (0,0,\ldots,0) \in D^m$$

et

$$\Phi^{-1}(A_i \cap W(M)) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D^m \mid x_i = 0\}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

En utilisant les notations du paragraphe 1 de ce chapitre, nous savons que pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \in \mathcal{R}(\hat{V})$, l'espace vectoriel $E_c(\mathcal{D})$ est faiblement singulier à l'origine de $\mathcal{D}$. Notons $H_c(\mathcal{D})$ la matrice associée à une base adaptée de $E_c(\mathcal{D})$, nous savons que (théorème 1 [illegible] chap. I)

$$d(H_c(\mathcal{D})) \cdot (H_c(\mathcal{D}))^{-1} \in \Omega^{p\times p}(D^m, \Phi^{-1}(A \cap W(M))) \quad .$$

D'autre part il existe une matrice $H_c(\hat{W})$ définie et holomorphe sur c telle que

$$H_c(\mathcal{D}) = H_c(\hat{W}) \circ \Phi_c \quad .$$

La forme différentielle

$$\tilde{\omega}_c = d H_c(\hat{W}) \circ H_c(\hat{W})^{-1}$$

est invariante par les opérations de $\pi_1(\hat{W})$, car E est invariant par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$, donc en particulier $E_c(\hat{W})$ est invariant par les opérations de $\pi_1(\hat{W})$. Il existe donc une forme différentielle ω_c holomorphe sur $\hat{W}$ et appartenant à $\Omega^{p\times p}(W, W \cap A)$ telle que :

$$\tilde{\omega}_c = \omega_c \circ \psi \quad .$$

Si c' désigne une autre composante connexe de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, le fait que E est invariant par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$ entraine que si $H_{c'}(\mathcal{D})$ est une base adaptée à $E_{c'}(\mathcal{D})$ nous avons :

$$\begin{aligned} H_{c'}(\mathcal{D}) &= H_c(\mathcal{D})\,\Delta \quad , \\ \text{ou} \qquad & \qquad (1) \\ H_{c'}(\hat{W}) &= H_c(\hat{W})\,\Delta \quad , \end{aligned}$$

où Δ est une matrice constante carrée d'ordre p inversible. En effet, il existe un élément $\alpha \in \pi_1(\hat{V})$ tel que :

$$\alpha^* : \mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V})) \to \mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$$

induise un isomorphisme de $\mathcal{H}^{p\times 1}(c)$ sur $\mathcal{H}^{p\times 1}(c')$. Il en résulte que $\alpha^* H_c(\mathcal{D})$ est une matrice dont les colonnes engendrent l'espace vectoriel $E_{c'}(\mathcal{D})$ et nous avons les égalités (1).

Ces considérations entrainent que

$$\omega_c = \omega_{c'} = \omega \mid \hat{W} \quad ,$$

et donc que

$$\omega \mid \hat{W} \in \Omega^{p\times p}(W, W\cap A) \ .$$

Ce résultat étant vrai pour tout point M de A nous avons :

$$\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A) \ .$$

Réciproque.

Nous nous donnons cette fois un système (s) de la forme $df = \omega f$ où $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$ et il s'agit de prouver maintenant que (s) est du type de Fuchs. C'est à dire que l'espace vectoriel de ses solutions est faiblement singulier sur A, car comme nous l'avons déjà fait remarquer (§ 1 remarque 2) E est faiblement singulier sur $V - A$. C'est une propriété locale, plaçons nous donc à nouveau en un point M de A, par exemple $A \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, et soit $W(M)$ un voisinage de coordonnée de M pour A. Nous utilisons ici les notations de la partie directe de la démonstration. Il existe une forme différentielle $\tilde{\omega}$ définie et holomorphe sur $\mathcal{D}$ telle que :

$$\Phi^* \omega \mid \hat{W} = \tilde{\omega} \ .$$

Comme $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$, nous avons $\tilde{\omega} \in \Omega^{p\times p}(\mathcal{D}, \Phi^{-1}(A\cap W))$ et par suite comme D^m est un ouvert de Stein dans $\mathbb{C}^m$,

$$\tilde{\omega} \mid \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dx_i}{x_i} + \tilde{\varpi} \quad ,$$

où

$$P_i \in \mathcal{H}_b^{p\times p}(D^m) \quad \text{pour tout} \quad i = 1,2,\ldots,n \quad ,$$

et

$$\tilde{\varpi} \in \Omega^{p\times p}(D^m) \ .$$

Mais alors le théorème 1 § 5 du chapitre I entraine que pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$ l'espace vectoriel $E_c(\mathcal{D})$ est faiblement

singulier à l'origine de D^m . Ceci étant vrai en tout point M de A , le système de Pfaff considéré est du type de Fuchs.

b) Les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale.

Nous savons qu'il existe une variété V' et une application analytique τ de V' sur V tel que : $\tau \mid V' - \tau^{-1}(A)$ soit un isomorphisme analytique sur V - A et tel que les composantes irréductibles de $A' = \tau^{-1}(A)$ soient en position générale. Soit alors (s) : df = ωf , un système de Pfaff du type de Fuchs appartenant à $\mathcal{F}^{p\times p}(V-A)$. Comme les deux revêtements $\mathcal{R}(\hat{V})$ et $\mathcal{R}(\hat{V'})$ sont analytiquement isomorphes, on peut considérer l'espace vectoriel E des solutions de (s) comme solution du système:

$$(s) \quad df = \tau^* \omega f$$

appartenant à $\mathcal{F}^{p\times p}(V'-A')$. L'espace vectoriel E étant faiblement singulier sur V' , il en résulte d'après a) que $\tau^* \omega \in \Omega^{p\times p}(V', A')$ et d'après le théorème 1 du § 3 du chapitre II , nous avons $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$.

Réciproque.

Soit :

$$(s) \quad df = \omega f$$

un système de Pfaff appartenant à $\mathcal{F}^{p\times p}(V-A)$ et tel que $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$. Alors :

$$(s^*) \quad df = \tau^* \omega f$$

et tel que $\tau^* \omega \in \Omega^{p\times p}(V', A')$. Le système (s^*) est donc de Fuchs c'est à dire que le système (s) est du type de Fuchs.

Remarque 1.

Le théorème 1 nous montre dans le cas b) que la notion de faiblement singulier pour un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{F}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est indépendante du choix de la modification de Hopf τ .

Théorème 2.

Tout sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{R}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ faiblement singulier sur V est l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff du type de Fuchs.

Démonstration.

Le fait que E est faiblement singulier sur V - A entraine l'existence d'une base de E dont la matrice associée H vérifie $\det(H(M)) \neq 0$ pour tout point M de $\hat{V}$.

Il reste donc à vérifier que $dH\, H^{-1} \in \Omega^{p\times p}(V, A)$. Pour cela, il suffit de reprendre ce qui a été fait au cours de la démonstration du théorème 1.

Remarque 2.

Les exemples étudiés dans le paragraphe 2 du chapitre II ainsi que le théorème 1, nous donne les systèmes de Pfaff du type de Fuchs dans de nombreux cas utiles.

Remarque 3.

Nos résultats s'appliquent en particulier si V est une surface de Riemann et A un ensemble de points isolés de V. Ils se réduisent alors à la théorie classique de Fuchs telle qu'elle a été rappelée dans [15] compte tenu des résultats (théorème 2.9. et théorème 2.10. de [13]) de Monsieur A.H.M. Levelt, généralisés par le théorème 1 et ses corollaires du §5 du chapitre I.

§ 3. DES EXEMPLES.

A) Un exemple local. Un des buts de cet exemple est, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, de montrer, que dans le cas où les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale, il est possible de définir les notions d'ordre fini et de faiblement singulier indépendemment de toute modification. Par ailleurs, l'étude de cet exemple nous montrera que dans de nombreux autres cas concrets, on peut obtenir un résultat analogue à celui qui sera énoncé dans la proposition 1. Mais c'est surtout le procédé de l'éclatement, qu'il faut retenir pour l'étude de cas particuliers où l'ensemble analytique A a des

composantes irréductibles avec singularités.

Pour tout nombre réel strictement positif r, notons : D_r le disque du plan complexe $\mathbb{C}$ centré à l'origine et de rayon r et $\hat{D}_r = D_r - \{0\}$.

Dans ce paragraphe, nous prenons pour variété V le produit $(D_\rho)^2 (\rho > 0)$ et pour sous ensemble analytique A de V, la réunion des sous ensembles analytiques A_i $(i = 1, 2, 3)$ définis respectivement par les équations : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = x_2$, où (x_1, x_2) est un système de coordonnées dans $\mathbb{C}^2$.

Pour tout élément $u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et tout nombre réel positif $r \leq \rho$, nous noterons $\mathcal{C}(u,r)$ (resp. $\hat{\mathcal{C}}(u,r)$) le sous ensemble de V défini par :

1°) si $u \in \mathbb{C}$,

$$0 \leq |x_1| < r$$

(resp. $0 < |x_1| < r$,)

et $$0 \leq \left| \frac{x_2}{x_1} - u \right| < r ,$$

(resp. $$0 < \left| \frac{x_2}{x_1} - u \right| < r) .$$

2°) si $u = \infty$,

$$0 \leq |x_2| < r$$

(resp. $0 < |x_2| < r$)

et $$0 \leq \left| \frac{x_1}{x_2} \right| < r$$

(resp. $$0 < \left| \frac{x_1}{x_2} \right| < r) .$$

Pour tout $u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, notons φ_u l'isomorphisme analytique de $\mathcal{C}(u, r)$ sur $(D_r)^2$ défini par :

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1, (\frac{x_2}{x_1} - u)) \quad \text{si} \quad u \neq \infty ,$$

et

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_2, \frac{x_1}{x_2}) \quad \text{si} \quad u = \infty .$$

Pour tout $u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et toute composante connexe $c(u)$ de $\psi^{-1}(\hat{\mathcal{C}}(u,r)) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, il existe une application $\Phi_{c(u)}$ de $\mathcal{R}((\hat{D}_r)^2)$ sur $c(u)$ qui réalise $\mathcal{R}((\hat{D}_r)^2)$ comme revêtement de $c(u)$.

Définition 1.

Un élément $f \in \mathcal{H}^{Px1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit d'ordre fini à l'origine de V s'il existe un nombre réel positif $r \leq \rho$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et toute composante connexe $c(u)$ de $\psi^{-1}(\hat{\mathcal{C}}(u,r))$, la fonction vectorielle $(f \mid c(u)) \circ \Phi_{c(u)}$ soit d'ordre fini à l'origine de $(D_r)^2$.

Remarque 1.

Désignons par V', la variété obtenue à partir de V en faisant un éclatement de Hopf τ à l'origine. Les composantes irréductibles de $A'=\tau^{-1}(A)$ sont en position générale et la définition 1 exprime que l'élément $f \in \mathcal{H}^{Px1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est d'ordre fini sur $A_o = \tau^{-1}(0)$ conformément à la définition 9 du § 1 de ce chapitre.

Proposition 1.

Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie m de $\mathcal{H}^{Px1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ possédant les propriétés suivantes :

A) E est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$.

B) Tous les éléments de E sont d'ordre fini à l'origine.

Alors pour tout $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, il existe un nombre réel positif $r(t)$ tel que la restriction de E à chaque composante connexe $c(t)$ de $\psi^{-1}(\hat{\mathcal{C}}(t,r(t))) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$ admette une base dont la matrice associée Y vérifie :

$$(Y \circ \Phi_{c(t)})(Q) = U_t(\psi(Q)) \times Q_1^{A_1^t} \times Q_2^{A_2^t} \times Q_1^{F_1^t} \times Q_2^{F_2^t} ,$$

où

$$Q = (Q_1 , Q_2) \in \mathcal{R}(\hat{D}_r)^2) ,$$

et où les matrices A_i^t et F_i^t sont respectivement diagonale et nilpotente sous forme triangulaire et où U_t est une matrice holomorphe dans $(D_{r(t)})^2$.

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 1 § 3 du chapitre I et des considérations ci-dessus.

Remarque 2.

Pour tout t différent de $0,1$ et ∞ nous avons :

$$A_2^t = F_2^t = 0 .$$

Remarque 3.

En introduisant la variété V' et l'éclatement indiqué dans la remarque 1, on voit facilement que cette proposition n'est rien d'autre que le théorème 1 § 3 du chapitre I appliqué à chaque point de $A_o = \tau^{-1}(0)$.

Définition 2.

Les valeurs propres de la matrice A_1^t (resp. A_2^t) sont appelées les exposants de E à l'origine sur (resp. relatif à) la sous variété $x_2 = tx_1 (t \neq \infty)$ ou $x_1 = 0$ $(t = \infty)$.

Cette notion d'exposants pour E peut être définie indépendemment de la proposition 1 et uniquement à l'aide des propriétés A et B. En effet, il suffit d'appliquer la théorie développée dans le chapitre I. D'autre part en utilisant à nouveau l'éclatement τ et la variété V', on voit que les exposants de E à l'origine sur la sous variété $x_2 = tx_1$ $(t \neq \infty)$ ou $x_1 = 0$ $(t = \infty)$ ne sont rien d'autre que les exposants de E considéré comme sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}'))$ au point de coordonnées homogène $(1,t)$ (si $t \neq \infty$) et $(0,1)$ si $t = \infty$ de la sous variété A_o, qui est une droite projective complexe. Alors vu l'ensemble de ramification des éléments de E, on voit aisément l'explication de $A_2^t = 0$ pour tout t différent de $0,1,\infty$.

Nous supposons dans la suite que la dimension de E est égale à p.

Définition 3.

L'espace vectoriel E est dit faiblement singulier à l'origine si pour tout $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la matrice $U_t(0)$ est inversible.

Cette définition concorde avec la définition donnée dans un chapitre antérieur et exprime que E, considéré comme sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}'))$ est faiblement singulier en tout point de $\tau^{-1}(0) \subset V'$.

Supposons maintenant que E est l'espace vectoriel des solutions d'un sytème de Pfaff du type de Fuchs:

$$df = \omega f$$

appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(V,A)$.

Proposition 2.

Les exposants de E à l'origine relatif à la sous variété A_i sont les valeurs propres de la matrice $(\text{rés}_V\ \omega \mid A_i)\ (0)$ tandis que les exposants de E à l'origine sur la sous variété $x_2 = tx_1\ (t \neq \infty)$ ou $x_1 = 0\ (t = \infty)$ sont indépendants de t et sont les valeurs propres de la matrice

$$\sum_{i=1}^{3} (\text{rés}_V\ \omega \mid A_i)\ (0) \quad .$$

Cette proposition s'obtient aisément en écrivant explicitement à l'aide des coordonnées l'éclatement τ .

Cette dernière proposition permet de définir la notion d'exposants dans le cas général. En effet dans le cas où les composantes irréductibles de A sont en position générale, cette notion peut-être définie à l'aide de la théorie développée dans le chapitre I ; dans l'autre cas, il suffit d'introduire cette notion à l'aide des résidus comme le suggère la proposition 3 .

Il est également immédiat que la proposition 2 se généralise à des situations plus complexes que celle qui a été étudiée dans ce paragraphe.

B) Un exemple global sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Désignons : par $x_o, x_1, \ldots, x_n$, un système de coordonnées homogènes de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$; pour tout $i = 0,1,\ldots,n$, par A_i la sous variété hyperplane définie par $x_i = 0$. Soient $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ les ouverts de coordonnées de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ définis respectivement par $x_i \neq 0$. L'ouvert U_i s'identifie à $\mathbb{C}^n(y_o, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ par l'isomorphisme analytique défini par les égalités :

$$y_k = \frac{x_k}{x_i} \qquad k = 0,1,\ldots,n \quad \text{et} \quad k \neq i \ .$$

Nous poserons $\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \{A = \bigcup_{i=o}^{n} A_i\}$.

Nous nous proposons ici, d'étudier les sous espaces vectoriels E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C})))$ possédant les propriétés suivantes

1°) E est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$.

2°) Tous les éléments de E sont d'ordre fini aux points

$$a_i = A_o \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \ldots A_n \quad (i = 0,1,\ldots,n) .$$

3°) E admet une base (e) vérifiant

$$(\text{dét. } T_e)(Q) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad Q \in \mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C})) .$$

Désignons, pour tout $i = 0,1,\ldots,n$ et toute composante connexe c_i de $\psi^{-1}(\hat{U}_i) \subset \mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ par $E \mid c_i$, l'espace vectoriel, également de dimension p, des restrictions des éléments de E à c_i. Comme $E \mid c_i \subset \mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{U}_i))$, on peut parler des exposants de $E \mid c_i$ au point a_i. Mais comme d'autre part $\pi_1(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ opère transitivement sur $\mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ et que, à chaque élément de $\pi_1(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ est associé un automorphisme de E, les exposants de $E \mid c_i$ sont égaux à ceux de $E \mid d_i$ pour toute autre composante connexe d_i de $\psi^{-1}(\hat{U}_i)$. Il est donc légitime de parler des exposants de E aux points a_i.

Notons β_i^1, β_i^2, ..., β_i^p les exposants de E au point a_i, chacun de ces exposants étant répété autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité. Nous savons que pour tout i et tout j

$$\beta_i^j = (\beta_{i,0}^j, \beta_{i,1}^j, \ldots, \beta_{i,i-1}^j, \beta_{i,i+1}^j, \ldots, \beta_{i,n}^j) .$$

Posons :

$$\beta_{i,l} = \sum_{j=1}^{p} \beta_{i,l}^j \qquad i \neq l ,$$

$$\gamma_{k,h} = \sum_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n} \beta_{k,l} + \beta_{h,k} ,$$

$$\Sigma = \sum_{\substack{i,l \\ i\neq l}} \beta_{i,l} .$$

Alors :

Proposition 3.

Pour tout couple (i,l) avec $i \neq l$, les nombres $\beta_{i,l}$ sont entiers et pour tout couple (k,h) avec $k \neq h$ nous avons $\gamma_{k,h} \leq 0$.

Corollaire 1. $\Sigma \leq 0$.

Démonstration.

Soit $T_e \in \mathcal{M}^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C})))$ la matrice associée à une base (e) de E telle que $(\det T_e)(Q) \not\equiv 0$ pour tout $Q \in \mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$. Pour tout $i = 0,1,\ldots,n$ et toute composante connexe c_i de $\psi^{-1}(\hat{U}_i)$, l'espace vectoriel $E \mid c_i$ vérifie les conditions d'application du théorème 1 du § 3 chap. I. Cet espace vectoriel est donc engendré par les colonnes d'une matrice T_i vérifiant :

$$T_i(Q) = W_i\left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{A_{i,j}} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{F_{i,j}} ,$$

où $W_i \in \mathcal{M}^{p\times p}(U_i)$.

Nous avons :

$$\det. T_i(Q) = \det. W_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{\beta_{i,j}} .$$

La fonction dét. W_i étant holomorphe sur U_i , elle peut s'écrire

$$\det. W_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{\lambda_{i,j}} \varphi_i ,$$

où les nombres $\lambda_{i,j}$ sont entiers positifs ou nuls et où φ_i est une fonction holomorphe sur U_i ne s'annulant plus identiquement sur $x_j = 0, (j=0,1,\ldots,n$ et $j \neq i)$.

Comme les colonnes de $T_e \mid c_i$ constituent également une base de $E \mid c_i$, nous avons :

$$T_e \mid c_i = T_i \; K_i ,$$

où K_i est une matrice complexe régulière. Il en résulte que pour tout couple de composantes connexe c_h et c_k $(h \neq k)$ vérifiant $c_h \cap c_k \neq \emptyset$ nous avons :

$$T_h = T_k \; K_{h,k} ,$$

où $K_{h,k}$ est une matrice complexe régulière. C'est à dire que :

$$\text{dét. } T_h(Q) = \text{dét.} T_k(Q) \quad \text{dét.} K_{h,k} \ .$$

Alors, en posant :

$$A = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq h}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_k}\right)^{\lambda_{k,j}} \varphi_h \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq h}}^{n} Q_j^{\beta_{h,j}} \ ,$$

$$B = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_k}\right)^{\lambda_{k,j}} \varphi_k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} Q_j^{\beta_{k,j}} \quad \text{dét. } K_{h,k} \ ,$$

nous avons :

$$(1) \quad A = B \ .$$

Si g_j $(j=0,1,\ldots,n$ et $j \neq i)$ désigne les générateurs de $\pi_1(\hat{U}_i)$ choisi comme dans le § 3 du chapitre I page 12, nous avons :

$$g_k^*(B) = B \ ,$$

$$g_k^*(A) = A \ \exp. 2\pi i \beta_{h,k} \ .$$

Ce qui entraine que pour tout couple (h,k) avec $h \neq k$, les nombres $\beta_{h,k}$ sont entiers. L'égalité (1) donne alors :

$$(2) \quad \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq h}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_h}\right)^{\lambda_{h,j}+\beta_{h,j}} \varphi_h = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_k}\right)^{\lambda_{k,j}+\beta_{k,j}} \varphi_k \quad \text{dét. } K_{h,k} \ .$$

C'est à dire que :

$$\lambda_{h,j} + \beta_{h,j} = \lambda_{k,j} + \beta_{k,j}$$

pour tout $j = 0,1,\ldots,n$ avec $j \neq h$ et $j \neq k$; car φ_h et φ_k ne s'annullent pas identiquement sur les hyperplans de coordonnées $x_j = 0$ $(j \neq h$ et $j \neq k)$. Posons : $\alpha_j = \lambda_{h,j} + \beta_{h,j}$, l'égalité (2) donne alors :

$$(3)\quad \prod_{\substack{j=0\\ j\neq h}}^{n} y_j^{\alpha_j}\ \varphi_h^* = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k\\ j\neq h}}^{n} \left(\frac{y_j}{y_k}\right)^{\alpha_j} \left(\frac{1}{y_k}\right)^{\alpha_h} \varphi_k^*\ \text{dét. } K_{h,k}\ ,$$

où :

$$y_j = \frac{x_j}{x_h} \qquad j = 0,1,\ldots, n \quad \text{et} \quad j \neq h\ ,$$

$$\varphi_h^* = \varphi_h\ (y_o, y_1, \ldots, y_{h-1}\ ,\ y_{h+1}\ ,\ldots,\ y_n)\ ,$$

$$\varphi_k^* = \varphi_k\ \left(\frac{y_o}{y_k}\ ;\ \frac{y_1}{y_k}\ ,\ldots,\ \frac{y_{h-1}}{y_k},\ \frac{1}{y_k}\ ,\ \frac{y_{h+1}}{y_k},\ldots,\frac{y_{k-1}}{y_k},\frac{y_{k+1}}{y_k}\ ,\ldots,\frac{y_n}{y_k}\right)$$

(si $h < k$) .

En d'autres termes :

$$(4)\qquad \varphi_h^* = (y_k)^{-\sum_{j=0}^{n} \alpha_j}\ \varphi_k^*\ \text{dét. } K_{h,k}\ .$$

Comme φ_h^* et φ_k^* sont holomorphes cette égalité entraine que

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \leq 0\ .$$

Les nombres $\lambda_{h,j}$ étant positifs où nuls, on a :

$$\gamma_{k,h} = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \beta_{k,j} + \beta_{h,k} \leq 0\ .$$

Alors

$$(n+1)\quad \sum_{\substack{k,h\\ k\neq h}} \beta_{k,h} = \sum_{\substack{h,k\\ h\neq k}} \gamma_{k,h} \leq 0\ .$$

Ce qui implique que $\Sigma \leq 0$. La proposition et son corollaire sont donc entièrement démontrés.

Théorème 1.

Si $\Sigma = 0$, E est l'espace vectoriel des sclutions d'un système de Pfaff complètement intégrable de Fuchs de la forme :

$$(s)\quad df = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \frac{dx_j}{x_j}\right) f \qquad \text{où} \quad \mathcal{A}_j \in \mathcal{M}(p,\mathbb{C}) \quad \text{pour tout } j.$$

Réciproquement l'espace vectoriel E des solutions d'un système de la forme (s) vérifient les conditions 1°), 2°), 3°) et $\Sigma = 0$.

Corollaire 2.

Si $\Sigma = 0$, les composantes de rang k des exposants de E aux points a_i $(i \neq k)$ sont toutes égales et sont les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}_k$.

Ce corollaire est une conséquence immédiate de la définition des exposants et du corollaire 1 du théorème 1 du §4 du chapitre 1.

Corollaire 3.

Les solutions d'un système (s) s'expriment à l'aide des fonctions élémentaires.

Démonstration du théorème 1.

a) La condition $\Sigma = 0$ entraine

$$\sum_{\substack{k,h \\ k\neq h}}^{n} \beta_{k,h} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{h\neq k} \gamma_{k,h} = 0$$

ou encore

$$\sum_{\substack{h,k \\ h\neq k}} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \beta_{k,j} + \beta_{h,k}\right) = 0 \quad .$$

Un calcul élémentaire nous donne

$$\sum_{\substack{h,k \\ h\neq k}} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_{k,j} + \lambda_{h,k} = \sum_{\substack{h,k \\ h\neq k}} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\right) ,$$

le second membre de cette égalité étant négatif ou nul et les nombres $\lambda_{i,j}$

positifs ou nuls, nous avons pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$, $\lambda_{i,j} = 0$ ainsi que :

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 0 \ .$$

Il en résulte alors de l'égalité (4) que les fonctions φ_i sont constantes, en d'autres termes, pour tout $i = 0,1,\ldots, n$, la fonction dét. W_i ne s'annule pas sur U_i , c'est à dire que $V \mid c_i$ est faiblement singulier au point a_i. Il est par suite solution d'un système de Pfaff complètement intégrable de la forme $df = \Omega_i f$ où :

$$\Omega_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} P_{i,j}\left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}$$

avec $P_{i,j} \in \mathcal{H}^{p\times p}(U_i)$.

Considérons la forme différentielle $\Omega = d\,T(Q)\,T(Q)^{-1}$, elle est holomorphe sur $\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C})$ et on a pour tout $i = 0,1,\ldots,n$

$$\Omega \mid \hat{U}_i = \Omega_i \in \Omega^{p\times p}(U_i, A \cap U_i) \ .$$

Donc :

$$\Omega \in \Omega^{p\times p}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), A) \ ,$$

c'est à dire

$$\Omega = \sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j \frac{dx_j}{x_j} \quad \text{où pour tout } j \ , \ \mathcal{A}_j \in \mathcal{M}(p,\mathbb{C}) \ .$$

Ce qui prouve la partie directe du théorème 1.

b) La restriction de la forme différentielle Ω à l'ouvert de coordonnée U_i s'écrit :

$$\Omega_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \mathcal{A}_j \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}$$

et le théorème 1 du § 5 du chapitre I entraîne que l'espace vectoriel V des solutions d'un système de la forme (s) est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ et

que tous ces éléments sont d'ordre fini aux points a_i . D'autre part, pour tout i et toute composante connexe c_i de $\psi^{-1}(\hat{U}_i) \subset \hat{R}(\hat{P}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des restrictions de V à c_i est faiblement singulier au point a_i . Il en résulte que $V \mid c_i$ est engendré par les colonnes d'une matrice $T_i(Q)$ de la forme :

$$W_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} Q_j^{A_{i,j}} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} Q_j^{F_{i,j}}$$

où $W_i = W_i(y_0, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ est une matrice holomorphe sur U_i . La fonction dét. $T_i(Q)$ est solution du système différentiel

$$dg = (\text{trace } \Omega_i)\, g$$

où

$$\text{trace } \Omega_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\text{trace } \mathscr{A}_j}{y_j}\, dy_j \quad .$$

Or pour tout $i = 0,1,\ldots,n$, $A_{i,j}$ et $\mathscr{A}_j$ ont même valeurs propres donc trace $A_{i,j}$ = trace $\mathscr{A}_j$, ce qui entraine que pour tout i , $dW_i = 0$ donc $W_i = C^{te}$. Il en résulte que pour tout couple (i,j) $(i \neq j)$ $\lambda_{i,j} = 0$ et $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 0$ et par suite $\Sigma = 0$. La réciproque du théorème 1 est donc démontrée.

Démonstration du corollaire 3.

La condition de complète intégrabilité d'un système (s) entraine la permutabilité deux à deux des matrices $\mathscr{A}_j$ $(j = 0,1,\ldots,n)$. Pour étudier l'espace vectoriel des solutions d'un système (s) , considérons le système (s_o) obtenu par restriction à l'ouvert de coordonnée U_o :

$$(s_o) \qquad df = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathscr{A}_j \frac{dy_j}{y_j} \right) f \quad .$$

Le changement de variables défini par

$$y_j = \exp. t_j \ , \ j = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n \ ;$$

transforme (s_o) en

$$(s') \quad df = \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \, dt_j\right) f \quad ,$$

qui est un système complétement intégrable à coefficients constants dont on connait explicitement les solutions [14] .

Le corollaire 2 est alors une conséquence immédiate de la forme explicite des solutions du système (s') .

C) Système de Pfaff de Fuchs associé à la fonction hypergéométrique F_1.

Nous savons que les fonctions hypergéométriques à deux variables sont définies sur le revêtement universel du plan projectif complexe auquel on a enlevé un certain nombre de sous variétés algébriques. Dans le cas des fonctions hypergéométriques à deux variables générales, la détermination des sous variétés de ramification est compliquée. Nous nous limiterons ici au cas de la fonctior hypergéométrique F_1 , ce que nous allons énoncer peut l'être en changeant l'ensemble de ramification pour les fonctions hypergéométriques F_2 et F_3 . Pour la théorie classique des fonctions hypergéométriques nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [1] .

Soient :

$V = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ le plan projectif complexe muni des coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3) .

$A = \bigcup_{i=1}^{6} A_i$ où les A_i sont les sous variétés de V définies respectivement par les équations $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,$ $x_2 = x_3$, $x_3 = x_1$, $x_1 = x_2$.

$\hat{V} = \hat{\mathbb{P}}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - A$.

Le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par la fonction F_1 , s'écrit dans $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées x et y sous la forme :

$$(S_1)\begin{cases} (1-x)(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - \beta y(1-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \qquad - \alpha\beta(x-y)z = 0 \\ (1-y)(y-x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (\gamma(y-x) - (\alpha+\beta'+1)y^2 + (\alpha+\beta'-\beta+1)xy + \beta x)\dfrac{\partial z}{\partial y} - x(1-x)\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \qquad - \alpha\beta(y-x)z = 0 \\ (x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \beta'\dfrac{\partial z}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Proposition 4.

L'application :

$$\sim : z \longrightarrow \tilde{z} = \begin{pmatrix} z \\ x\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ y\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

transforme le système (S_1) en un système de Pfaff du type de Fuchs, prolongeable en un système de même nature appartenant à $\mathcal{F}^{3\times 3}(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - A)$.

Démonstration :

En posant :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\ ,\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ ,\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ ;$$

le système (S_1) nous donne :

$$r = a_1 p + a_2 q + a_3 z$$

$$t = b_1 p + b_2 q + b_3 z$$

$$s = c_1 p + c_2 q + c_3 z$$

où

$$a_1 = \frac{-\gamma}{x\,(1-x)} + \frac{(\alpha+\beta+1)x}{(1-x)(x-y)} - \frac{(\alpha+\beta-\beta'+1)\,y}{(1-x)(x-y)} - \frac{\beta' y}{x(1-x)(x-y)} \quad ,$$

$$a_2 = \frac{\beta\, y\,(1-y)}{x(1-x)(x-y)} \quad , \qquad a_3 = \frac{\alpha\,\beta}{x(1-x)} \quad ,$$

$$b_1 = \frac{\beta' x(1-x)}{y(1-y)(y-x)} \quad , \qquad b_3 = \frac{\alpha\,\beta'}{y(1-y)} \quad ,$$

$$b_2 = -\frac{\gamma}{y(1-y)} + \frac{(\alpha+\beta'+1)y}{(1-y)(y-x)} - \frac{(\alpha-\beta+\beta'+1)x}{(1-y)(y-x)} - \frac{\beta\, x}{y(1-y)(y-x)} \quad ,$$

$$c_1 = \frac{\beta'}{x-y} \quad , \quad c_2 = -\frac{\beta}{x-y} \quad , \quad c_3 = 0 \quad .$$

En notant $\theta_1 z = x \dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\theta_2 z = y \dfrac{\partial z}{\partial y}$, nous obtenons :

$$d\tilde{z} = d \begin{vmatrix} z \\ \theta_1 z \\ \theta_2 z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ x\,a_3 & \frac{1}{x} + a_1 & \frac{a_2\, x}{y} \\ y\,c_3 & \frac{y c_1}{x} & c_2 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y} \\ x\,c_3 & c_1 & c_2 \frac{x}{y} \\ b_3 y & \frac{y\, b_1}{x} & \frac{1}{y} + b_2 \end{pmatrix} dy \right] \begin{pmatrix} z \\ \theta_1 z \\ \theta_2 z \end{pmatrix}$$

En utilisant les égalités suivantes :

$$x\,a_3 = \frac{\alpha\,\beta}{1-x} \quad , \quad \frac{1}{x} + a_1 = \frac{1}{x}\,(1 - \gamma + \beta') + \frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{1-x} - \frac{\beta'}{x-y}$$

$$\frac{a_2 x}{y} = \frac{\beta}{1-x} + \frac{\beta}{x-y} \quad , \quad y\,c_3 = 0 \quad , \quad \frac{y c_1}{x} = -\frac{\beta'}{x} + \frac{\beta'}{x-y} \quad , \quad c_2 = -\frac{\beta}{x-y} \quad ;$$

et

$$x c_3 = 0 \quad , \quad c_1 = \frac{\beta'}{x-y} \quad , \quad c_2 \frac{x}{y} = -\frac{\beta}{y} - \frac{\beta}{x-y} \quad ,$$

$$b_3 y = \frac{\alpha \beta'}{1-y} \quad , \quad \frac{y b_1}{x} = \frac{\beta'}{1-y} + \frac{\beta'}{y-x} \quad ,$$

$$\frac{1}{y} + b_2 = \frac{1}{y}(1-\gamma+\beta) + \frac{1}{1-y}(\alpha+\beta'+1-\gamma) - \frac{\beta}{y-x} \quad ;$$

nous obtenons :

$$(\tilde{S}_1)\ d\tilde{z} = \left(A_1 \frac{dx}{x} + A_2 \frac{dy}{y} + A_3 \frac{d(x-y)}{x-y} + A_5 \frac{dy}{y-1} + A_6 \frac{dx}{x-1}\right) \tilde{z}$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma+\beta' & 0 \\ 0 & -\beta' & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1-\gamma+\beta \end{pmatrix} \quad ,$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta' & \beta \\ 0 & \beta' & -\beta \end{pmatrix} \quad , \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta' & -\beta' & \gamma-\alpha-\beta'-1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & \gamma-\alpha-\beta-1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Si nous désignons par x_1, x_2, x_3 des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, le système $(\tilde{S}_1)$ se transforme en posant :

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad , \quad y = \frac{x_1}{x_3}$$

en le système de Pfaff du type de Fuchs sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$:

$$(\tilde{S}_1) : \quad d\tilde{z} = \left(\sum_{i=1}^{z} A_i \frac{dx_i}{x_i} + A_4 \frac{d(x_1-x_2)}{x_1-x_2} + A_5 \frac{d(x_2-x_3)}{x_2-x_3} + A_6 \frac{d(x_1-x_3)}{x_1-x_3}\right) \tilde{z}$$

où

$$A_3 = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{6} A_i \quad .$$

Soit $\mathcal{F}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}^{3\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ des solutions de (S_1) .

Corollaire 4.

L'application $\sim$ définit un isomorphisme de $\mathcal{F}_1$ sur un sous-espace vectoriel $\tilde{\mathcal{F}}_1$ de dimension 3 sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{O}^{3\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$, faiblement singulier sur V.

L'espace vectoriel $\tilde{\mathcal{F}}_1$ sur $\mathbb{C}$ des solutions du système de Pfaff du type de Fuchs (S_1) est de dimension 3 et faiblement singulier sur V (il est solution d'un système de Fuchs). D'autre part l'indépendance linéaire est conservée par l'application $\sim$ ce qui entraine que $\mathcal{F}_1$ est isomorphe à $\tilde{\mathcal{F}}_1$.

Remarques.

Il est possible de donner une démonstration directe du corollaire, la proposition 4 devenant alors une conséquence immédiate de celui-ci.

Les résultats du chapitre I ainsi que ceux de A permettent de donner la description des matrices fondamentales de solutions du système de Pfaff $(\tilde{S}_1)$, en particulier, on a explicitement les exposants (ce sont les valeurs propres des matrices $A_i (i = 1,2,\ldots,6)$. Ces résultats améliorent ceux que M. Erdelyi a obtenu dans [3] .

L'étude générale des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}^{3\times 3}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ faiblement singulier sur V qui utilise également les résultats de ce travail fera l'objet d'une publication ultérieure en commun avec Monsieur A.H.M. Levelt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. APPELL et J. KAMPE DE FERIET. Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Gautnier-Villars et Cie.

[2] E.A. CODDINGTON et N. LEVINSON. Theory of ordinary Differential Equations. Mc. Graw-Hill Book company. Inc. New York 1955.

[3] A. ERDELYI. Bull. Amer. Math. Soc. 57, 1951.

[4] F.R. GANTMACHER. Matrizenrechnung I und II. V.E.B.,Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.

[5] R. GERARD. C.R. Acad. Sc. Paris t. 262 p. 42-43 (3 janvier 1966).

[6] " " C.R. Acad. Sc. Paris t. 264, série A p. 117 (16 janvier 1967).

[7] " " C.R. Acad. Sc. Paris t. 264. série A p. 596 (29 mars 1967).

[8] " " C.R. Acad. Sc. Paris.

[9] R. GERARD et G. REEB. Le théorème de Floquet et la théorie de De Rham (pour les formes de degré 1) comme cas particulier d'un théorème d'Ehresmann sur les structures feuilletées. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, classe di Science, Vol XXI, Fasc. I.

[10] H. GRAUERT et R. REMMERT. Komplexe Raüme. Math. Annalen Bd. 136. S. 245-318, 1958.

[11] M. HERVE . Several complex variables. Local Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay. Oxford University Press 1963.

[12] N. JACOBSON. Lectures in Abstract Algebra. The University series in Higher Mathematics 1953. D. Van Nostrand Company, Inc. New York.

[13] A.H.M. LEVELT . Hypergeometric Functions (Thèse, Drukkerij Holland N.V. Amsterdam).

[14] F. MAISANO. Sull'integrale generale di un sistema lineare del primo ordine ai differenziali totali a coefficienti costanti. Rendiconti del seminario matematica di Padova 34, 1964.

[15] H.J. NASTOLD. Über meromorphe Schnitte complex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen. Math Zeitz. Bd. 69 , S.366-394 1958.

--ooOoo--